Foglio di esercizi n.2 - Calcolo Numerico

20/10/2002

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x} - 5$. Si determino le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

a) Si applichi il metodo di bisezione all'intervallo $[1/10, 1]$. Quante iterazioni sono necessarie per approssimare la soluzione con un errore assoluto inferiore a 10^{-4}?

b) Si eseguano 3 passi del metodo di bisezione e del metodo delle secanti sull'intervallo $[1/10, 1]$.

c) Si eseguano 3 passi del metodo delle tangenti partendo da $x_0 = 1/10$.

d) Si confrontino le approssimazioni ottenute con i tre metodi.

Esercizio 2 Si studi la convergenza del metodo delle secanti applicato all'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = x^2 - 2x - \log x$.

Esercizio 3 Se si applica il metodo delle tangenti all'equazione

$$f(x) = x^{10} - 1 = 0,$$

scegliendo come punto iniziale $x_0 = 1/2$, sono necessarie ben 38 iterazioni per ottenere un'approssimazione di una soluzione dell'equazione con errore assoluto minore di 0.1. Perchè?

Esercizio 4 Studiare la convergenza del metodo delle tangenti (scelta del punto iniziale ed ordine di convergenza) alle soluzioni delle seguenti equazioni:

a) $e^x - 4x^2 - 3 = 0$;

b) $x^2 - x \log x - k = 0$, per $k > 0$;

c) $f(x) = 0$ dove $f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

Esercizio 5 Studiare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, nel caso delle seguenti funzioni $g(x)$.

a) $g(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{4}$;

b) $g(x) = k \arctan(x)$ per $k > 0, x_0 > 0$;

c) $g(x) = 1 + \log\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

Esercizio 6 Sono date le funzioni

$$g_1(x) = x(x-2), \quad g_2(x) = x(2-x)$$

.

a) Determinare i punti fissi di $g_1(x)$ e di $g_2(x)$.

b) Studiare la convergenza dei metodi iterativi $x_{i+1} = g_1(x)$ e $x_{i+1} = g_2(x)$ ai rispettivi punti fissi indicando in ciascun caso un intervallo di valori iniziali x_0 che assicurino la convergenza e l'ordine di convergenza di questi metodi.

c) Individuare l'insieme $W = \{x^* : g_1(g_1(x^*)) = x^*\}$ e descrivere il comportamento delle successioni $x_{i+1} = g_1(x_i)$ con $x_0 \in W$.