

Foglio di esercizi n.4 - Calcolo Numerico

21/11/2002

Esercizio 1 Si determinino dei vettori di \mathbf{R}^n tali che

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_\infty,$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_2 = n \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Esercizio 2 Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} vettori di \mathbf{R}^n . Si dimostri, sfruttando le proprietà delle diadi, che

$$\|\mathbf{x}\mathbf{y}^T\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2.$$

Esercizio 3 Si dimostri che la funzione $f : \mathbf{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{R}$ definita come $f(A) = \rho(A)$ non è una norma matriciale.

Esercizio 4 Si dimostri che

$$\mathbf{x} \rightarrow \|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{i}$$

è una norma vettoriale e se ne disegni il cerchio unitario per $n = 2$.

Esercizio 5 Sia $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ invertibile. Si dimostri che $f(\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x}\|_\infty$ è una norma vettoriale su \mathbf{R}^n .

Esercizio 6 Si verifichi che la funzione di \mathbf{R}^2 definita come $f(x_1, x_2) = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}\right)^2$ non definisce una norma vettoriale.

Esercizio 7 Sia $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica con autovalori positivi. Si dimostri che

$$f(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}$$

definisce una norma vettoriale. Si analizzi dapprima il caso $n = 2$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$