Foglio di esercizi n.6 - Calcolo Numerico

12/12/2002

Esercizio 1 Si approssimi la funzione $f(x) = \tan(x)$ con il polinomio di grado 1 che interpola $f(x)$ in 0 e $\pi/4$. Si dia una maggiorazione del resto dell'interpolazione.

Esercizio 2 Sia $f(x) = \sin(\pi x)$.

a) Si determini il polinomio $p(x)$ che interpola la funzione $f(x)$ nei tre punti 0, 1/2,1.

b) Si scriva il polinomio $q(x)$ di grado minimo tale che

$$q(0) = f(0), \quad q(1) = f(1), \quad q'(0) = f'(0), \quad q'(1) = f'(1).$$

c) Si determini una maggiorazione del resto $r_1(x) = |f(x) - p(x)|$ per $0 \leq x \leq 1$ e si confronti con $\varepsilon_2 = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - q(x)|$.

Esercizio 3 Si confrontino gli errori analitici assoluti che si commettono approssimando e^x per $0 < x < 1$ con i seguenti polinomi di primo grado:

a) il polinomio che interpola e^x in 0 e in 1;

b) il polinomio di Taylor che approssima e^x nell'intorno di 0.

Esercizio 4 È assegnata la funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

(a) Calcolare il polinomio $p(x)$ che interpola la funzione nei punti di ascissa -1, 0 e 1.

(b) Spiegare come mai in questo caso non è possibile utilizzare il teorema del resto.

(c) Calcolare il massimo del resto $r(x) = f(x) - p(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 5 Si supponga di interpolare il polinomio

$$f(x) = x^2$$

nei due punti 0, k, dove $0 < k \leq 1$, e sia $p(x)$ il polinomio di primo grado così ottenuto. Per quale valore di k è minimo $\max\limits_{0\leq x\leq 2} |f(x) - p(x)|$?.

Esercizio 6 Sia $f \in C^1[a, b]$ e $S = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$.

a) Scrivere la formula di quadratura S_1, che si ottiene sostituendo a $f(x)$ il polinomio costante $f(a)$ ed il relativo resto.

b) Scrivere la corrispondente formula composta J_1 ed il resto e darne una interpretazione geometrica.

Esercizio 7 Dire in quanti sottointervalli deve essere suddiviso l'intervallo $[0, 1]$ affinché sia minore di 0.510^{-3} l'errore analitico che si commette approssimando con la formula dei trapezi l'integrale $S = \int_0^1 f(x)\mathrm{dx}$, per le seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f(x) = x\sin(\pi x), \qquad f(x) = x^2 e^x.$$

Esercizio 8 Per apporssimare $\ln 2$ si possono usare le seguenti formule:

a) la formula di Taylor di $\ln(1 + x)$, troncata ad un opportuno termine;

b) formule di quadratura per valutare
$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{dx}.$$

Quale dei due procedimenti è migliore se si vuole ottenere un'approssimazione con un errore relativo minore di 10^{-5}?

Esercizio 9 Di una funzione sono noti i valori nei punti $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$, ed il valore $f'(x_1)$. Scrivere il polinomio di terzo grado p, tale he $p(x_i) = f(x_i)$, per $i = 1, 2, 3$ e $p'(x_1) = f'(x_1)$. Costruire poi la formula di quadratura per l'approssimazione di $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{dx}$ consideranto $\int_{x_0}^{x_2} p(x)\mathrm{dx}$. Si tratta di una formula nota?