2.2 Notazioni standard e funzioni comuni

Questo paragrafo fornisce una panoramica su alcune funzioni e notazioni matematiche standard ed analizza le relazioni tra esse; illustra inoltre l'uso delle notazioni asintotiche.

Monotonicità

Una funzione $f(n)$ è ***monotona crescente*** se $m \le n$ implica $f(m) \le f(n)$; analogamente è ***monotona decrescente*** se $m \le n$ implica $f(m) \ge f(n)$. Una funzione $f(n)$ è ***strettamente crescente*** se $m < n$ implica $f(m) < f(n)$ ed è ***strettamente decrescente*** se $m < n$ implica $f(m) > f(n)$.

Base e tetto

Dato un qualunque numero reale x, si denota il più grande intero minore o uguale a x con $\lfloor x \rfloor$ (si legga "base di x") e il più piccolo intero maggiore o uguale a x con $\lceil x \rceil$ (si legga "tetto di x"). Per tutti i reali x

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x + 1 .$$

Per qualunque intero n,

$$\lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor = n ,$$

e per qualunque intero n, a e b interi, con $a \ne 0$ e $b > 0$,

$$\lceil \lceil n/a \rceil /b \rceil = \lceil n/ab \rceil \tag{2.3}$$

e

$$\lfloor \lfloor n/a \rfloor /b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor . \tag{2.4}$$

Le funzioni base e tetto sono monotone crescenti.

Polinomi

Dato un intero positivo d, un ***polinomio in n di grado d*** è una funzione $p(n)$ della forma

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i ,$$

dove le costanti $a_0, a_1, \ldots, a_d$ sono i ***coefficienti*** del polinomio e $a_d \ne 0$. Un polinomio è ***asintoticamente positivo*** se e solo se $a_d > 0$. Dato un polinomio asintoticamente positivo $p(n)$ di grado d, si ha $p(n) = \Theta(n^d)$. Per qualsiasi costante reale $a \ge 0$, la funzione n^a è monotona crescente e per qualsiasi costante reale $a \le 0$, la funzione n^a è monotona decrescente. Si dice che una funzione $f(n)$ è ***limitata polinomialmente*** se $f(n) = n^{O(1)}$, che è equivalente a dire che $f(n) = O(n^k)$ per qualche costante k (si veda l'Esercizio 2.2-2).

Esponenziali

Per ogni reale $a \ne 0$, m ed n, si hanno le seguenti identità:

$$
\begin{aligned}
a^0 &= 1\,, \\
a^1 &= a\,, \\
a^{-1} &= 1/a\,, \\
(a^m)^n &= a^{mn}\,, \\
(a^m)^n &= (a^n)^m\,, \\
a^m a^n &= a^{m+n}\,.
\end{aligned}
$$

Per ogni n e $a \geq 1$, la funzione a^n è monotona crescente rispetto a n. Quando sarà conveniente, si assumerà $0^0 = 1$.

Il tasso di crescita di polinomi ed esponenziali può essere messo in relazione con il seguente fatto: per tutte le costanti reali a e b tali che $a > 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0\,, \tag{2.5}$$

da cui si può concludere che

$$n^b = o(a^n)\,.$$

Quindi, qualunque funzione esponenziale positiva con base strettamente maggiore di 1 cresce più velocemente di qualunque polinomio.

Usando e per denotare $2.71828\ldots$, la base della funzione logaritmo naturale, si ha per ogni reale x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\,, \tag{2.6}$$

dove "!" denota la funzione fattoriale definita nel seguito di questo paragrafo. Per ogni reale x, si ha la disuguaglianza

$$\boxed{e^x \geq 1 + x\,,} \quad \forall x \tag{2.7}$$

dove l' uguaglianza vale solo quando $x = 0$. Quando $|x| \leq 1$, abbiamo l'approssimazione

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2\,. \tag{2.8}$$

Quando $x \to 0$, l'approssimazione di e^x con $1 + x$ è abbastanza buona:

$$e^x = 1 + x + \Theta(x^2)\,.$$

(In questa equazione, la notazione asintotica è usata per descrivere il comportamento al limite per $x \to 0$ piuttosto che per $x \to \infty$.) Si ha che per ogni x:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x\,.$$

Logaritmi

Si useranno le seguenti notazioni:

$\lg n$	=	$\log_2 n$	(logaritmo binario),
$\ln n$	=	$\log_e n$	(logaritmo naturale),
$\lg^k n$	=	$(\lg n)^k$	(elevamento a potenza),
$\lg \lg n$	=	$\lg(\lg n)$	(composizione).

Un'importante notazione convenzionale che sarà adottata è che le *funzioni logaritmiche si applicano solo al termine successivo nella formula*, così $\lg n + k$ significherà $(\lg n) + k$ e non $\lg(n + k)$. Per $n > 0$ e $b > 1$, la funzione $\log_b n$ è strettamente crescente.

Per tutti i reali $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ e n, purché $b \neq 1$ e $c \neq 1$, vale che

$$\begin{aligned}
a &= b^{\log_b a}\,, \\
\log_c(ab) &= \log_c a + \log_c b\,, \\
\log_b a^n &= n \log_b a\,, \\
\log_b a &= \frac{\log_c a}{\log_c b}\,, \\
\log_b(1/a) &= -\log_b a\,, \\
\log_b a &= \frac{1}{\log_a b}\,, \\
a^{\log_b n} &= n^{\log_b a}\,.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Dato che cambiando la base di un logaritmo da una costante ad un'altra il valore del logaritmo cambia solo per un fattore costante, si userà spesso la notazione "$\lg n$" quando non si sia interessati ai fattori costanti, come nella notazione O. Gli informatici trovano che la base più naturale per i logaritmi sia 2 perché molti algoritmi e strutture dati prevedono la divisione in due parti del problema.

Vi è un semplice sviluppo in serie per $\ln(1 + x)$ quando $|x| < 1$:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots\,.$$

Per $x > -1$ si hanno anche le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{x}{1 + x} \le \ln(1 + x) \le x\,, \tag{2.10}$$

$\log < x$ per $x > 0$

dove l'uguaglianza vale solo per $x = 0$.

Si dice che una funzione $f(n)$ è ***polilogaritmicamente limitata*** se $f(n) = \lg^{O(1)} n$. Si può correlare la crescita dei polinomi e dei polilogaritmi sostituendo nell'Equazione (2.5) $\lg n$ al posto di n e 2^a al posto di a ottenendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg^b n}{(2^a)^{\lg n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg^b n}{n^a} = 0\,.$$

Da questo limite si può concludere che

$\lg^b n = o(n^a)$

per qualunque costante $a > 0$. Di conseguenza, qualunque funzione polinomiale positiva cresce più velocemente di qualunque funzione polilogaritmica.

Fattoriali

La notazione $n!$ (si legge "n fattoriale") è definita per interi $n \ge 0$ come

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0\,, \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n > 0\,. \end{cases}$$

Perciò, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Un limite superiore debole per la funzione fattoriale è $n! \leq n^n$, dato che ciascuno degli n termini del prodotto fattoriale è al più n. L'***approssimazione di Stirling***

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right) , \tag{2.11}$$

dove e è la base dei logaritmi naturali, fornisce sia un limite superiore che un limite inferiore più stretto. Usando l'approssimazione di Stirling si può dimostrare che

$$\begin{aligned} n! &= o(n^n) , \\ n! &= \omega(2^n) , \\ \lg(n!) &= \Theta(n \lg n) . \end{aligned}$$

Per ogni n valgono anche i seguenti limiti:

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(12n)} \tag{2.12}$$

Serie aritmetica

La sommatoria

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n ,$$

che viene fuori dall'analisi dell'insertion sort, è una ***serie aritmetica*** ed ha come valore

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{3.1}$$

$$= \Theta(n^2) . \tag{3.2}$$