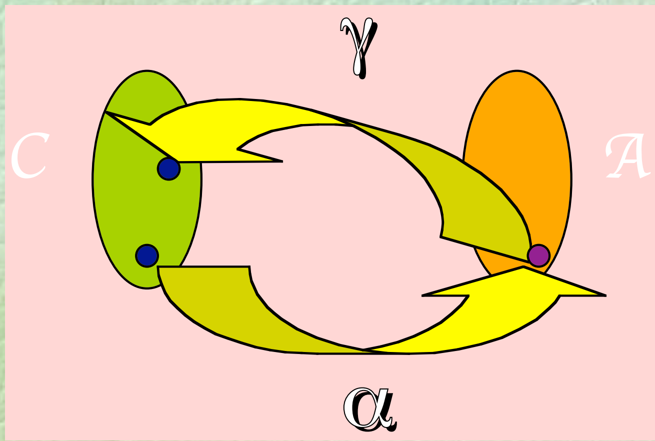
Operatori di raffinamento: un approccio sistematico alla progettazione di domini astratti

Operatori di raffinamento

- dalle connessioni di Galois agli operatori di chiusura superiore (upper closure operator, *uco*)
- il reticolo delle interpretazioni astratte
- operatori di raffinamento
  - prodotto ridotto
  - completamento disgiuntivo
  - completamento per complementi
  - prodotto cardinale ridotto
- interpretazione logica dei raffinamenti
- completamento di Heyting

Dalle connessioni di Galois agli operatori di chiusura superiore



dominio concreto $(\mathcal{P}(C), \subseteq, \emptyset, C, \cup, \cap)$

dominio astratto $(\mathcal{A}, \leq,$ *bottom, top, lub, glb*$)$

funzione di astrazione $\alpha: \mathcal{P}(C) \rightarrow \mathcal{A}$

funzione di concretizzazione $\gamma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(C)$

- la composizione di α e γ: è un *operatore di chiusura superiore* su $\mathcal{P}(C)$ $\rho: \mathcal{P}(C) \rightarrow \mathcal{P}(C)$ tale che
  1. $\rho(x) \subseteq x$ è una corretta approssimazione di x
  2. ρ è monotono (composizione di operatori monotoni)
  3. $\rho = \rho\rho$ è idempotente (per proprietà di α e γ, approssimazione in un colpo solo)

uco's e famiglie di Moore

- dominio concreto ($\mathcal{P}(C)$, $\subseteq$, $\emptyset$, C, $\cup$, $\cap$)
- dominio astratto ($\mathcal{A}$, $\leq$, *bottom, top, lub, glb*)
- ogni operatore di chiusura ρ: $\mathcal{P}(C) \rightarrow \mathcal{P}(C)$ è determinato in modo unico dall'insieme dei suoi punti fissi $\rho(\mathcal{P}(C))$ (immagine del dominio $\mathcal{P}(C)$)
  - ($\rho(\mathcal{P}(C))$, $\subseteq$) è un reticolo completo
  - $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(C)$ è l'insieme dei punti fissi $\rho(\mathcal{P}(C))$ di un operatore di chiusura ρ se e solo se $\mathcal{X}$ è una famiglia di Moore
    - contiene C
    - è chiuso sotto glb
    - è la chiusura di Moore di $\mathcal{X}$ c
  - la chiusura di Moore di $\mathcal{X}$
    - il più piccolo sottoinsieme di $\mathcal{P}(C)$ che contiene $\mathcal{X}$ e che è una famiglia di Moore

Gli uco sono interpretazioni astratte

- ogni connessione di Galois determina univocamente un uco
- dato un uco ρ: $\mathcal{P}(C) \rightarrow \mathcal{P}(C)$, esistono numerosi domini $\mathcal{A}$ tali che

  $\rho = \lambda x.\gamma(\alpha(x))$, con (α, γ) connessione di Galois fra $\mathcal{P}(C)$ e $\mathcal{A}$
  - tutti questi domini astratti sono "isomorfi" a ρ
  - poiché $\mathcal{A}$ e (α, γ) definiscono una interpretazione astratta, un qualunque uco ρ definisce una interpretazione astratta
    - senza un dominio astratto, che è semplicemente una "implementazione" della proprietà modellata da ρ
    - più facile ragionare sulla relazione fra diverse interpretazioni astratte
      - perché tutte definite sullo stesso dominio
    - naturalmente per definire un interprete astratto (per esempio, definendo gli operatori astratti), abbiamo bisogno di un dominio astratto

Il reticolo delle interpretazioni astratte

- un qualunque uco ρ definisce una interpretazione astratta
- l'insieme degli uco su $\mathcal{P}(C)$ è parzialmente ordinato dall'ordinamento funzionale puntuale basato su $\subseteq$

  $\rho_1: \mathcal{P}(C) \rightarrow \mathcal{P}(C)$ $\rho_2: \mathcal{P}(C) \rightarrow \mathcal{P}(C)$

  $\rho_1 \leq_{\text{uco}} \rho_2$ se e solo se $\forall x.\ \rho_1(x) \subseteq \rho_2(x)$
- $(\text{uco}(\mathcal{P}(C)), \leq_{\text{uco}})$ è un reticolo completo
  - elemento top: l'uco che mappa ogni elemento di $\mathcal{P}(C)$ in C (la peggiore interpretazione astratta che dà informazione nulla!)
  - elemento bottom: l'uco che mappa ogni elemento di $\mathcal{P}(C)$ in se stesso (la più precisa interpretazione astratta!)

Operatori di raffinamento

$$(\mathrm{uco}(\mathcal{P}(C)), \leq_{\mathrm{uco}})$$

- raffinamento di uco (dominio astratto)

$$\mathcal{R} : \mathrm{uco}(\mathcal{P}(C)) \rightarrow \mathrm{uco}(\mathcal{P}(C))$$

  - fornisce un dominio astratto più preciso

$$\forall \mathcal{A} \in \mathrm{uco}(\mathcal{P}(C)).\ \mathcal{R}(\mathcal{A}) \leq_{\mathrm{uco}} \mathcal{A}$$

  - è monotono
  - è idempotente
    - il miglioramento di precisione avviene in un solo passo
- i raffinamenti sono operatori di chiusura inferiore su $\mathrm{uco}(\mathcal{P}(C))$

Il prodotto ridotto

$$\mathcal{A} * \mathcal{B}$$

- prodotto cartesiano dei due domini con identificazione (riduzione) di quelle coppie che hanno lo stesso significato (che rappresentano la stessa proprietà)
- dato un dominio astratto $\mathcal{A} \in \mathrm{uco}(\mathcal{P}(C))$, la funzione $\lambda x.\ x * \mathcal{A}$
  - è un operatore di chiusura inferiore su $\mathrm{uco}(\mathcal{P}(C))$
  - è un raffinamento
- il dominio più astratto (semplice) che è più preciso di entrambi i domini (che permette di derivare sia le proprietà modellate da $\mathcal{A}$ che quelle modellate da $\mathcal{B}$, e magari qualcosa in più)
- è esattamente il glb su $\mathrm{uco}(\mathcal{P}(C))$
  - congiunzione di proprietà