9

SEMANTICHE E COMPORTAMENTI OSSERVABILI

1

Bossi, Gabbrielli, Levi, Martelli

The s-semantics approach: theory and applications,

JLP 1994

LA SEMANTICA "LOGICA" DEI LINGUAGGI LOGICI

- il modello minimo di Herbrand M_P
    - una delle proprietà più "vendute" della programmazione logica
    - anche perché ha equivalenti formulazioni di tipo più tradizionale

      O_P insieme di successo, semantica top-down

      F_P lfp T_P, semantica bottom-up

- purtroppo tale semantica non cattura proprietà importanti dal punto di vista computazionale, come le sostituzioni di risposta calcolate
    - i teoremi di correttezza e completezza che riguardano le risposte calcolate sono più forti del teorema di equivalenza $O_P = M_P$
    - le sostituzioni di risposta calcolate sono proprio quello che rende la programmazione logica qualcosa di più specifico della semplice dimostrazione di teoremi
- la semantica logica non è sufficiente a caratterizzare completamente il linguaggio
- è necessario trattare i linguaggi logici come "normali" linguaggi di programmazione, anche se possiamo ereditare nella semantica più tradizionali molte delle proprietà della semantica logica.

QUALE SEMANTICA?

la risposta dipende da

- quale uso vogliamo fare della semantica
  - specifica per chi implementa il linguaggio
  - strumento per permettere all'utente di comprendere
  - punto di riferimento per lo sviluppo di strumenti
    (le trasformazioni e/o ottimizzazioni devono preservare una semantica)
  - base per strumenti semantics - based
    (analisi, verifica, generazione di interpreti e compilatori, etc.)
- quali proprietà dell'esecuzione intendiamo formalizzare e specificare con la semantica (osservabili)
  - la terminazione con successo
  - la terminazione con successo o con fallimento
  - le risposte calcolate
  - le risposte calcolate intermedie (parziali)
  - le chiamate di procedura (call patterns)
  - gli alberi SLD
  - le sequenze di transizioni della macchina astratta che esegue i programmi compilati (per es. la WAM di PROLOG)
- certi osservabili sono più astratti di altri
- certi osservabili sono i più adatti per una particolare utilizzazione della semantica
- NON HA SENSO PARLARE DI "UNA" SEMANTICA!

OSSERVABILI ED EQUIVALENZE

- il punto da cui partire è la "semantica operazionale", per es. l'albero SLD

- un osservabile α è una qualunque proprietà ricavabile dall'albero SLD
  - l'albero SLD, le derivazioni, i risultanti, i call patterns, le risposte parziali, le risposte calcolate, i fallimenti finiti, il successo

- la scelta dell'osservabile induce una relazione di equivalenza fra i programmi

$P_1 \cong_\alpha P_2$ sse P_1 e P_2 non possono essere distinti dalle osservazioni

$$W_P^\alpha = \{ \langle G, \sigma \rangle \mid \sigma \text{ è il valore dell'osservabile } \alpha \text{ ricavato dall'albero SLD del goal } G \}$$

$$P_1 \cong_\alpha P_2 \iff W_{P_1}^\alpha = W_{P_2}^\alpha$$

per un qualunque goal G, le osservazioni in P_1 e P_2 sono uguali

- un esempio

l'osservabile ξ è "risposte calcolate a meno di ridenominazioni"

$P_1 \cong_\xi P_2$ sse

$\forall$ goal G

$G \xrightarrow{\vartheta}_{P_1} \blacksquare$

$G \xrightarrow{\vartheta}_{P_2} \blacksquare$

OSSERVABILI E DENOTAZIONI

P programma

$[\![P]\!]$ denotazione (semantica) di P

- la denotazione è corretta rispetto all'osservabile α, se

$$[\![P_1]\!] = [\![P_2]\!] \longrightarrow P_1 \cong_\alpha P_2$$

- la denotazione è minimale rispetto all'osservabile α, se

$$P_1 \cong_\alpha P_2 \longrightarrow [\![P_1]\!] = [\![P_2]\!]$$

- se la denotazione è corretta e minimale
    - la relazione di equivalenza indotta dalla denotazione è la stessa di quella indotta dall'osservabile
    - la denotazione è "la migliore possibile" fra quelle corrette

- la correttezza è essenziale
    - una semantica che identifichi programmi che vengono distinti dall'osservabile, è inutile per ragionare su quell'osservabile

- la minimalità è utile
    - una semantica troppo dettagliata che distingua programmi equivalenti rispetto ad un osservabile, rende inutilmente più complesso il ragionare su quell'osservabile
    - la minimalità è significativa solo quando è combinata con la correttezza

RELAZIONI FRA OSSERVABILI E DENOTAZIONI

- due osservabili α_1 ed α_2 tali che α_1 è più astratto di α_2 (formalizzazione precisa nel futuro)

esempio

α_1 successo

α_2 risposte calcolate

- se $[\![\ ]\!]$ è corretta rispetto ad α_2, lo è anche rispetto ad α_1
- se $[\![\ ]\!]$ è corretta rispetto ad α_1, può non esserlo rispetto ad α_2
- se $[\![\ ]\!]$ è corretta e minimale rispetto ad α_2, può non essere minimale per α_1
- se $[\![\ ]\!]$ è corretta e minimale rispetto ad α_1, può non esserlo rispetto ad α_2

esempio

$[\![P]\!]_{\alpha_1}$ = minimo modello di Herbrand di P

$[\![P]\!]_{\alpha_2}$ = s-semantica di P (vedi dopo)

$[\![\ ]\!]_{\alpha_1}$ è corretta e minimale rispetto ad α_1
non è corretta rispetto ad α_2

$[\![\ ]\!]_{\alpha_2}$ è corretta e minimale rispetto ad α_2
è corretta, ma non minimale rispetto ad α_1

LA COMPOSIZIONALITA'

- un'altra proprietà importante delle denotazioni, in aggiunta a correttezza e minimalità.

- esiste un omomorfismo fra sintassi e semantica

  $\forall$ operatore sintattico f
  $\exists$ un operatore semantico F
  $$[\![f(A_1, \ldots, A_n)]\!] = F([\![A_1]\!], \ldots, [\![A_n]\!])$$

- una semantica composizionale permette di ragionare in modo modulare

- è lo stile tipico della semantica denotazionale

- una denotazione può essere composizionale solo rispetto ad un sottoinsieme degli operatori sintattici

- una semantica corretta, minimale e composizionale (rispetto a cosa?) viene spesso chiamata <u>fully abstract</u>

UNA VISIONE TRADIZIONALE DEGLI OPERATORI SINTATTICI DEI LINGUAGGI LOGICI

- un programma logico

goal $?- A_1, \dots, A_n$

clausole definite
$$\begin{cases} H_1 :- B_{11}, \dots, B_{n1}. \\ \vdots \\ H_m :- B_{1m}, \dots, B_{nm}. \end{cases}$$

- le clausole sono dichiarazioni di procedura
- un atomo nel goal (o nel corpo di una clausola) è una chiamata di procedura
- la congiunzione (,) è il meccanismo per comporre sintatticamente chiamate di procedura.
- la disgiunzione (.) è il meccanismo sintattico per comporre dichiarazioni

- i costrutti rispetto ai quali si può considerare la proprietà di composizionalità
  - chiamata di procedura - dichiarazione di procedura (composizionalità ~~angelica~~ atomica)
  - composizione di chiamate di procedura (AND-composizionalità)
  - composizione di dichiarazioni (OR-composizionalità)

- le denotazioni dei programmi logici sono di solito relative ad una parte soltanto del programma
  l'insieme delle clausole definite
  (per esempio, il modello minimo di Herbrand)
- le denotazioni devono essere completate con definizioni che ci dicono come si ottiene la semantica di un goal
  - come si definisce la semantica di una chiamata di procedura a partire dalla semantica delle dichiarazioni (comp. atomica)
  - come si definisce la semantica di una congiunzione di chiamate di procedura, a partire da quelle delle singole procedure (AND-composiz.)

COMPOSIZIONALITA' NEI LINGUAGGI LOGICI

G goal

P insieme di clausole definite

G;P programma logico completo

- Supponiamo di avere una definizione di denotazione corretta rispetto ad α per l'insieme di clausole definite $[\![P]\!]_\alpha$

- la composizionalità ... rispetto ai tre operatori può essere analizzata
  - fornendo la denotazione di G
  - studiando cosa succede componendo due insiemi di clausole P_1 e P_2

- ~~Se~~ sono in grado di determinare la semantica di un goal atomico a partire da $[\![P]\!]_\alpha$, la denotazione $[\![\ ]\!]_\alpha$ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ è composizionale nelle procedure.

- Se sono in grado di determinare la semantica di un goal congiuntivo, in termini di quella di goal atomici, ~~ma~~ e quindi anche in termini di $[\![\ ]\!]_\alpha$, la denotazione $[\![\ ]\!]_\alpha$ è anche AND-composizionale.

- Se sono in grado di determinare la semantica $[\![P_1 . P_2]\!]_\alpha$ dell'insieme di clausole ottenuto componendo (unione) P_1 e P_2, a partire da $[\![P_1]\!]_\alpha$ e $[\![P_2]\!]_\alpha$, la denotazione $[\![\ ]\!]_\alpha$ è anche OR-composizionale.

UN ESEMPIO: IL MODELLO MINIMO DI HERBRAND

$M_P = O_P$ (insieme di atomi ground rifiutabili) $=$
$F_P = T_P \uparrow \omega$

- M_P è corretto rispetto all'osservabile "successo"

$$M_{P_1} = M_{P_2} \Longrightarrow \mathcal{W}_{P_1}^{\alpha_1} = \mathcal{W}_{P_2}^{\alpha_1}$$

[• sia $G = A_1, \dots, A_n$ un goal che ha successo in P_1 e non in P_2

$$G \xrightarrow[P_1]{\vartheta} \square$$

- per la correttezza della risoluzione SLD, ϑ è una risposta corretta per G in P_1
- esiste una sostituzione ϱ, tale che $\vartheta\varrho$ è una sostituzione corretta per G, e $G' = G\vartheta\varrho$ è ground
- per la completezza della risoluzione SLD, $G' \xrightarrow[P]{\varepsilon} \square$.
- poiché G non è rifiutabile in P_2, per il lifting lemma nemmeno G' è rifiutabile in P_2.
- almeno uno degli atomi ground $A_1\vartheta\varrho, \dots, A_n\vartheta\varrho$ non è rifiutabile in P_2, mentre lo è in P_1
- $O_{P_1} \neq O_{P_2}$ $(M_{P_1} \neq M_{P_2})$ contro l'ipotesi.]

- M_P è minimale rispetto all'osservabile "successo"

$$\mathcal{W}_{P_1}^{\alpha_1} = \mathcal{W}_{P_2}^{\alpha_1} \Rightarrow M_{P_1} = M_{P_2}$$

[• basta prendere i sottoinsiemi composti dai soli goal atomici ground di $\mathcal{W}_{P_1}^{s}$ e $\mathcal{W}_{P_2}^{s}$, che coincidono con gli insiemi di successo]

- M_P <u>non è</u> AND-composizionale rispetto all'osservabile "successo"

CAMBIAMO L'OSSERVABILE

α_3 = "istanze ground" con le sostituzioni di risposta

$$\{ \langle G, \vartheta' \rangle \mid G\vartheta' \text{ è ground}, \; G \xrightarrow[P]{\vartheta} \square, \; G\vartheta' \text{ è un'istanza di } G\vartheta \}$$

- M_P è corretto rispetto ad α_3

$$M_{P_1} = M_{P_2} \Rightarrow \mathcal{W}_{P_1}^{\alpha_3} = \mathcal{W}_{P_2}^{\alpha_3}$$

[• per assurdo

$\langle G, \vartheta \rangle \in \mathcal{W}_{P_1}^{\alpha_3}$ $\quad \langle G, \vartheta \rangle \notin \mathcal{W}_{P_2}^{\alpha_3}$ $\quad G = A_1, \dots, A_n$

(ϑ è una sostituzione corretta per G in P_1 e non in P_2)

- per la completezza $\quad G\vartheta \xrightarrow[P_1]{\varepsilon} \square$
- tutti gli atomi (ground) $A_1\vartheta, \dots, A_n\vartheta \in M_{P_1}$ e quindi anche a M_{P_2}
- $G\vartheta$ sarebbe rifiutabile in P_2 e quindi (per la completezza) ϑ sarebbe una sostituzione corretta per G in P_2]

- M_P è minimale rispetto ad α_3

$$\mathcal{W}_{P_1}^{\alpha_3} = \mathcal{W}_{P_2}^{\alpha_3} \Rightarrow M_{P_1} = M_{P_2}$$

[• per G atomico, $\langle G, \vartheta \rangle \in \mathcal{W}_P^{\alpha_3} \leftrightarrow G\vartheta \in M_P$]

- α_1 ed α_3 definiscono la stessa relazione di equivalenza fra programmi
  - ma α_3 è migliore, perché è anche AND-composizionale

LA SEMANTICA DEI GOAL RISPETTO AD α_3

$[\![G]\!]_{M_P}$

("esecuzione" del goal nella denotazione)

la chiusura di procedure

$$[\![A]\!]_{M_P} = \{ \langle A, \vartheta \rangle \mid \exists B \in M_P,\ \vartheta' = mgu(A,B) \text{ ristretto alle variabili di } A,\ A\vartheta \text{ è un'istanza ground di } A\vartheta' \}$$

la composizione di chiusure di procedure

$$[\![A, G]\!]_{M_P} = \{ \langle (A,G), \vartheta \rangle \mid \exists \langle A, \vartheta' \rangle \in [\![A]\!]_{M_P},\ \exists \langle G, \vartheta'' \rangle \in [\![G]\!]_{M_P},\ \vartheta \text{ è la restrizione alle variabili di } (A,G) \text{ della sostituzione } \vartheta' \otimes \vartheta'' \}$$

$\otimes$ è un'operazione su sostituzioni definita come

- $e' = eqns(\vartheta')$
- $e'' = eqns(\vartheta'')$
- $\vartheta = mgu(eqns(\vartheta') \cup eqns(\vartheta''))$

il teorema di AND-composizionalità

per un qualunque goal G

$$\langle G, \vartheta \rangle \in \mathcal{W}_P^{\alpha_3} \longleftrightarrow \langle G, \vartheta \rangle \in [\![G]\!]_{M_P}$$

le osservazioni per un goal qualunque possono essere ottenute "eseguendo" il goal nella denotazione (M_P)

UN ESEMPIO

p(a).   q(X).
q(b).   r(X,Y) :- q(Y).

$M_P = \{ p(a), q(a), q(b), r(a,a), r(a,b), r(b,a), r(b,b) \}$

- vogliamo studiare il goal ?- p(X), r(X,Y).

?- p(X), r(X,Y)
| X\a
?- r(a,Y)
|
?- q(Y)
Y\b
□ □

gli elementi in $W_P^{\alpha_s}$ relativi al goal

< (p(X), r(X,Y)), {X\a, Y\b}>
< (p(X), r(X,Y)), {X\a, Y\a}>

- l'esecuzione composizionale del goal in M_P

$[\![p(X)]\!]_{M_P} = \{ \langle p(X), X\backslash a \rangle \}$

$[\![r(X,Y)]\!]_{M_P} = \{ \langle r(X,Y), \{X\backslash a, Y\backslash a\} \rangle, \langle r(X,Y), \{X\backslash a, Y\backslash b\} \rangle, \langle r(X,Y), \{X\backslash b, Y\backslash a\} \rangle, \langle r(X,Y), \{X\backslash b, Y\backslash b\} \rangle \}$

nella composizione

$[\![p(X), r(X,Y)]\!]_{M_P}$

ci sono 4 composizioni ($\otimes$) di sostituzioni, di cui solo 2 sono "unificabili"

il risultato è esattamente la coppia di osservazioni in $W_P^{\alpha_s}$

Mp E' UNA DENOTAZIONE DI UN INSIEME DI PROCEDURE?

- la denotazione di una procedura è tipicamente una funzione che (in un linguaggio senza stato) deve essere applicata agli argomenti attuali della procedura, per calcolare l'osservazione.

- si può facilmente dimostrare che M_P può essere ottenuto calcolando l'osservabile α_3 per tutti i goal atomici più generali
    - questo è possibile in programmazione logica, perché possiamo eseguire una procedura lasciando tutti gli argomenti non specificati
    - per molti osservabili interessanti, dalla denotazione delle procedure non istanziate, siamo in grado di calcolare la semantica di una qualunque chiamata di procedura

- abbiamo già visto che, per G atomico,

$$\langle G, \vartheta \rangle \in \mathcal{W}_P^{\alpha_3} \leftrightarrow G\vartheta \in M_P$$

- si può dimostrare che

$$\langle p(X_1,\ldots,X_n), \vartheta \rangle \in \mathcal{W}_P^{\alpha_3} \leftrightarrow p(X_1,\ldots,X_n)\vartheta \in M_P$$

- l'insieme di successo (o M_P) può quindi essere definito in termini di α_3 come segue

$$O_P = \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \text{ è una istanza ground di } p(X_1,\ldots,X_n)\vartheta, \\ ?\!-\, p(X_1,\ldots,X_n) \xrightarrow[P]{\vartheta} \square, \end{array} \right.$$

- M_P non è OR-composizionale

ALTRE PROPRIETÀ DEL MODELLO MINIMO DI HERBRAND

- M_P non è corretto rispetto all'osservabile "risposte calcolate"

$$M_{P_1} = M_{P_2} \not\Rightarrow \mathcal{W}_{P_1}^{\alpha_2} = \mathcal{W}_{P_2}^{\alpha_2}$$

controesempio

$P_1 = \{ p(a).\ q(x). \}$ $\qquad$ $P_2 = \{ p(a).\ q(a). \}$

$M_{P_1} = M_{P_2} = \{ p(a), q(a) \}$

$\mathcal{W}_{P_1}^{\alpha_2} \neq \mathcal{W}_{P_2}^{\alpha_2}$, perché

?- q(Y) calcola la risposta Y\a in P_2
calcola la risposta vuota in P_1

- il problema sembra essere legato al fatto che con il modello minimo di Herbrand non si distingue tra termini non-ground e loro istanze

  - una denotazione diversa espressa in termini di atomi non ground

LA s-SEMANTICA

s ← sostituzioni di risposta

$$O_P = \{ A \mid A \text{ è una istanza ground di } p(X_1,\dots,X_n)\vartheta,\ ?\!-\ p(X_1,\dots,X_n) \xrightarrow{\vartheta}_P \blacksquare \}$$

sostituzioni di risposte corrette ground

$$O_P^c = \{ A \mid A \text{ è una istanza di } p(X_1,\dots,X_n)\vartheta,\ ?\!-\ p(X_1,\dots,X_n) \xrightarrow{\vartheta}_P \blacksquare \}$$

sostituzioni di risposta corrette

- se vogliamo una denotazione corretta rispetto alle risposte calcolate, la soluzione più ovvia è quella di ottenere le sostituzioni di risposte calcolate

$$O_P^s = \{ A \mid A = p(X_1,\dots,X_n)\vartheta,\ ?\!-\ p(X_1,\dots,X_n) \xrightarrow{\vartheta}_P \blacksquare \}$$

- anche la s-semantica non è un'interpretazione di Herbrand
- il dominio semantico è lo stesso della c-semantica

- il controesempio non è più tale.

P_1 $\boxed{\begin{array}{l} p(a). \\ q(X). \end{array}}$ P_2 $\boxed{\begin{array}{l} p(a). \\ q(X). \\ q(a). \end{array}}$

$$O_{P_1}^s = \{p(a), q(X)\} \neq O_{P_2}^s \{p(a), q(X), q(a)\}$$

e non ne esistono altri, perché O_P^s è effettivamente corretta rispetto ad α_2.

CORRETTEZZA DI O_p^s

$$O_{p_1}^s = O_{p_2}^s \Rightarrow W_{p_1}^{d_2} = W_{p_2}^{d_2}$$

[

$$O_{p_1}^s = O_{p_2}^s$$
$$\Downarrow$$
$$W^{d_2}_{O^s_{p_1}} = W^{d_2}_{O^s_{p_2}}$$
$$\Updownarrow$$
$$W_{p_1}^{d_2} = W_{p_2}^{d_2}$$

per il teorema precedente]

MINIMALITA' DI O_p^s

$$W_{p_1}^{d_2} = W_{p_2}^{d_2} \Rightarrow O_{p_1}^s = O_{p_2}^s$$

[ovvio, perché $O_{p_i}^s$ è semplicemente il sottoinsieme di $W_{p_i}^{d_2}$ per i goal atomici più generali]

LA SEMANTICA DEI GOAL CONGIUNTIVI E LA AND-COMPOSIZIONALITÀ

$$[\![A, G]\!]^{\alpha_2}_{O_p{}^S} = \{ \langle (A,G), \vartheta \rangle \mid$$

$$\exists \langle A', \vartheta' \rangle \in [\![A]\!]^{\alpha_2}_{O_p{}^S},\ \delta' = mgu(A, A'),$$

$$\exists \langle G', \vartheta'' \rangle \in [\![G]\!]^{\alpha_2}_{O_p{}^S},\ \delta'' = mgu(G, G'),$$

ϑ è la restrizione ad (A, G) della sostituzione

$$\vartheta' \otimes \delta' \otimes \vartheta'' \otimes \delta'' \}$$

il teorema di AND-composizionalità:

per un qualunque goal G

$$\langle G, \vartheta \rangle \in \mathcal{O}_p^{\alpha_2} \qquad (G \xrightarrow[p]{\vartheta} \blacksquare)$$

se e solo se

$$\langle G, \vartheta \rangle \in [\![G]\!]^{\alpha_2}_{O_p{}^S}$$

$($ $G = A_1, \dots, A_n$,

$\exists$ $B_1, \dots, B_n$ varianti di atomi in O_p^S

$\vartheta' = mgu((A_1, \dots, A_n), (B_1, \dots, B_n))$,

$G\vartheta = G\vartheta'$ $)$

- le risposte per un goal qualunque possono essere calcolate espandendolo nella denotazione

UN ESEMPIO

P

$$\boxed{\begin{array}{l} q(f(a,Y)). \\ p(a). \\ p(f(X,Y)) \text{ :- } p(X). \end{array}}$$

$$O_P^s = \{q(f(a,Y)),\ p(a),\ p(f(a,X)),\ p(f(f(a,X_1),X_2)),\ \dots\}$$

- il goal $?\text{- } p(X), q(X).$

  calcola in P la risposta $X \backslash f(a,Y)$

- la stessa risposta si ottiene eseguendo il goal in O_P^s

LA DEFINIZIONE BOTTOM-UP DELLA S-SEMANTICA

- come per M_P è possibile dare una equivalente definizione come minimo punto fisso di un operatore delle conseguenze immediate

- da O_P a T_P

$$O_P = \{ A \mid A \text{ è una ist. ground di } p(x_1, \ldots, x_n)\vartheta,\ ?\text{-}\ p(x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow[P]{\vartheta} \blacksquare \}$$

$$T_P(I) = \{ A \mid A :\text{-}\ B_1, \ldots, B_n \text{ è un'istanza ground di clausole di } P,\ \{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq I \}$$

interpretazione di Herbrand

$$O_P^S = \{ A \mid A = p(x_1, \ldots, x_n)\vartheta,\ ?\text{-}\ p(x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow[P]{\vartheta} \blacksquare \}$$

$$T_P^S(I) = \{ A \mid A' :\text{-}\ B_1, \ldots, B_n \text{ è una clausola di } P,\ \{B_1', \ldots, B_n'\} \subseteq I,\ \vartheta = mgu((B_1, \ldots, B_n), (B_1', \ldots, B_n')),\ A = A'\vartheta \}$$

insieme di atomi non ground (modulo varianza)

- si usano le clausole originali (non le loro istanze) e si istanzia con l'mgu (esattamente come si fa nella risoluzione SLD)

LA S-SEMANTICA PUÒ ESSERE DEFINITA BOTTOM-UP

- il teorema di equivalenza

$$\mathcal{O}_P^s = T_P^s \uparrow \omega$$

- otteniamo due semantiche equivalenti
  - per generalizzare "lo stile" della semantica tradizionale dei linguaggi logici, ci manca una nozione di semantica model-theoretic (dichiarativa).
  - i domini semantici della s-semantica (e della c-semantica) sono interpretazioni?