

9

SEMANTICHE E
COMPORTAMENTI
OSSERVABILI

1

Bossi, Gabrielli, Leni, Martelli

The s-semantics approach: Theory and applications,
JLP 1994

LA SEMANTICA "LOGICA" DEI LINGUAGGI LOGICI

- il modello minimo di Hubrand M_p
 - una delle proprietà più "vendute" delle programmazione logica
 - anche perché ha equivalenti formulazioni di tipo più tradizionale
 - O_p insieme di numero, semantica top-down
 - F_p lfp T_p , semantica bottom-up
- purtroppo tale semantica non cattura proprietà importanti del punto di vista computazionale, come le sostituzioni di risposte calcolate
- i teoremi di correttezza e completezza che riguardano le risposte calcolate sono più forti del teorema di equivalenza $O_p = M_p$
- le sostituzioni di risposte calcolate sono proprio quello che rende la programmazione logica qualcosa di più specifico delle semplici dimostrazioni di teoremi
- le semantiche logiche non è sufficiente a caratterizzare completamente i linguaggi
- è necessario trattare i linguaggi logici come "normali" linguaggi di programmazione, anche se possiamo ereditare nelle semantiche più tradizionali molte delle proprietà delle semantiche logiche.

QUALE SEMANTICA?

(3)

Le risposte dipende da

- quale uso vogliamo fare della semantica
 - specifica per chi implementa il linguaggio
 - strumento per permettere all'utente di comprendere
 - punto di riferimento per lo sviluppo di strumenti

(le trasformazioni e/o ottimizzazioni devono preservare una semantica)

- base per strumenti semantics-based
(analisi, verifica, generazione di interpreti e compilatori, etc.)

- Quali proprietà dell'esecuzione intendiamo formalizzare e specificare con la semantica (osservabili)

- le terminazioni in successo
- le terminazioni in errore o con fallimento
- le risposte calcolate
- le risposte calcolate intermedie (parziali)
- le strutture di procedura (cell pattern)

gli altri SLD

- le sequenze di transizioni delle macchine estratte da eseguire i programmi compilati (per es. le WAM di PROLOG)

- certi osservabili sono più astratti di altri
- certi osservabili sono i più adatti per una particolare applicazione della semantica

• NON HA SENSO PARLARE DI "UNA" SEMANTICA!

OSSERVABILI ED EQUIVALENZE

- il punto da cui partire è le "riconomie operative", per es. l'albero SLD
- un osservabile è una qualunque proprietà ricorsiva dell'albero SLD
 - l'albero SLD, le derivazioni, i risultenti, i call patterns, le risposte parziali, le risposte calcolate, i fallimenti finiti, il numero
- la scelta dell'osservabile induce una relazione di equivalenza fra i programmi

$P_1 \approx_2 P_2$ sse P_1 e P_2 non possono essere distinti dalle osservazioni

$W_P^d = \{ \langle G, \sigma \rangle \mid \sigma \text{ è il valore dell'osservabile } d \text{ ricevuto dall'albero SLD del goal } G \}$

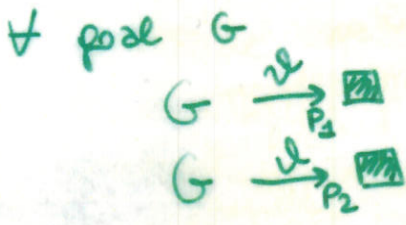
$P_1 \approx_2 P_2 \iff W_{P_1}^d = W_{P_2}^d$

per un qualunque goal G , le osservazioni in P_1 e P_2 sono uguali

un esempio

l'osservabile \approx_3 è "risposte calcolate a meno di ridenominazioni"

$P_1 \approx_3 P_2$ sse



OSSERVABILI E DENOTAZIONI

5

P programma

$\llbracket P \rrbracket$ denotazione (semantica) di P

- la denotazione \bar{e} corretta rispetto all'osservabile α , se

$$\llbracket P_1 \rrbracket = \llbracket P_2 \rrbracket \rightarrow P_1 \approx_{\alpha} P_2$$

- la denotazione \bar{e} minimale rispetto all'osservabile α , se

$$P_1 \approx_{\alpha} P_2 \rightarrow \llbracket P_1 \rrbracket = \llbracket P_2 \rrbracket$$

- se la denotazione \bar{e} corretta e minimale

- la relazione di equivalenza involta delle denotazioni \bar{e} è la stessa di quella involta dell'osservabile
- la denotazione \bar{e} "la migliore possibile" fra quelle corrette

• la correttezza è essenziale

- una semantica che identifichi programmi che vengono distinti dall'osservabile, è inutile per ragionare su quell'osservabile

• la minimalità è utile

- una semantica troppo dettagliata che distingue programmi equivalenti rispetto ad un osservabile rende inutilmente più complesso il ragionare su quell'osservabile

- la minimalità è significativa solo quando è combinata con la correttezza

RELAZIONI FRA OSSERVABILI

6

E

DENOTAZIONI

- due osservabili d_1 ed d_2 tali che d_1 è più astratto di d_2 (formalizzazione precisa nel futuro)

Esempio

d_1 successo
 d_2 risposte calcolate

- se $\llbracket \cdot \rrbracket$ è corretta rispetto ad d_2 , lo è anche rispetto ad d_1
- se $\llbracket \cdot \rrbracket$ è corretta rispetto ad d_1 , può non essere rispetto ad d_2
- se $\llbracket \cdot \rrbracket$ è corretta e minimale rispetto ad d_2 , può non essere minimale per d_1
- se $\llbracket \cdot \rrbracket$ è corretta e minimale rispetto ad d_1 , può non essere rispetto ad d_2

Esempio

$\llbracket P \rrbracket_{d_1}$

= minimo modello di Hubrand di P

$\llbracket P \rrbracket_{d_2}$

= s-semantica di P (vedi dopo)

$\llbracket \cdot \rrbracket_{d_1}$

è corretta e minimale rispetto ad d_1
non è corretta rispetto ad d_2

$\llbracket \cdot \rrbracket_{d_2}$

è corretta e minimale rispetto ad d_2
è corretta, ma non minimale rispetto ad d_1

LA COMPOSIZIONALITÀ

7

- un'altra proprietà importante delle denotazioni, in aggiunta a correttezza e minimalità.
- esiste un omomorfismo fra sintassi e semantica
- \forall operatore sintattico f
- \exists un operatore semantico F
- $\llbracket f(A_1, \dots, A_n) \rrbracket = F(\llbracket A_1 \rrbracket, \dots, \llbracket A_n \rrbracket)$
- una semantica composizionale permette di ragionare in modo modulare
- è lo stile tipico delle semantiche denotazionali
- una denotazione può essere composizionale solo rispetto ad un sottoinsieme degli operatori sintattici
- una semantica corretta, minimale e composizionale (rispetto a cosa?) viene spesso chiamata fully abstract

UNA VISIONE TRADIZIONALE DEGLI OPERATORI SINTATTICI - DEI LINGUAGGI LOGICI

• un programma logico

goal

clausole definite

$$\left\{ \begin{array}{l} ? - A_1, \dots, A_n \\ H_1 :- B_{11}, \dots, B_{1m_1} \\ \vdots \\ H_m :- B_{m1}, \dots, B_{mm} \end{array} \right.$$

- le clausole sono dichiarazioni di procedura
- un atomo nel goal (o nel corpo di una clausola) è una chiamata di procedura
- la congiunzione (,) è il meccanismo per comporre sintatticamente clausole di procedura
- la disgiunzione (.) è il meccanismo sintattico per comporre dichiarazioni

• i costrutti rispetto ai quali si può considerare le proprietà di compositionalità

- chiamata di procedura - dichiarazione di procedura (compositionalità atomica)
- composizione di chiamate di procedura (AND-compositionalità)
- composizione di dichiarazioni (OR-compositionalità)

le denotazioni dei programmi logici sono di solito relative ad una parte sottile del programma e l'insieme delle clausole definite

(per esempio, il modello minimo di Herbrand)

- le denotazioni devono essere complete con definizioni di ci di loro come si ottiene le strutture di un goal
- come si definisce le strutture di una chiamata di procedura a partire dalle strutture delle dichiarazioni (comp. atomica)
- come si definisce le strutture di una congiunzione di chiamate di procedura, a partire da quelle delle singole procedure (AND-composit.)

COMPOSIZIONALITÀ NEI LINGUAGGI LOGICI

9

- G goal
- P insieme di clausole definite
- G; P programma logico completo

• Supponiamo di avere una definizione di denotazione corretta rispetto ad α per l'insieme di clausole definite $\llbracket P \rrbracket_\alpha$

• le composizionali: ... rispetto ai tre operatori più come analizzate

- fornendo la denotazione di G
- studiando cosa succede componendo due insiemi di clausole P_1 e P_2
- Se sono in grado di determinare le semantiche di un goal atomico a partire da $\llbracket P \rrbracket_\alpha$, la denotazione $\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha$ è interpretabile e composizionale nelle procedure.
- Se sono in grado di determinare le semantiche di un goal congiuntivo, in termini di quelle di goal atomici, e quindi anche in termini di $\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha$, la denotazione $\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha$ è anche AND-composizionale.
- Se sono in grado di determinare le semantiche $\llbracket P_1.P_2 \rrbracket_\alpha$ dell'insieme di clausole $P_1.P_2$ ottenute componendo (unione) P_1 e P_2 , e partire da $\llbracket P_1 \rrbracket_\alpha$ e $\llbracket P_2 \rrbracket_\alpha$, la denotazione $\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha$ è anche OR-composizionale.

UN ESEMPIO: IL MODELLO MINIMO

10
11

DI HERBRAND

$$M_P = O_P \text{ (insieme di atomi ground rifiutabili)} =$$

$$F_P = T_P \uparrow W$$

- M_P è corretto rispetto all'enumerabile "successo"

$$M_{P_1} = M_{P_2} \Rightarrow W_{P_1}^{d_1} = W_{P_2}^{d_1}$$

- [sia $G = A_1, \dots, A_n$ un goal che ha successo in P_1 e non in P_2

$G \xrightarrow{\theta} \square$

 - per la correttezza delle risoluzioni SLD, θ è una unificazione corretta per G in P_1 .
 - esiste una sostituzione σ , tale che $\theta\sigma$ è una unificazione corretta per G , e $G' = G\theta\sigma$ è ground.
 - per la completezza delle risoluzioni SLD, $G' \xrightarrow{\epsilon} \square$.
 - poiché G non è rifiutabile in P_2 , per il lifting lemma nemmeno G' è rifiutabile in P_2 .
 - almeno uno degli atomi ground $A_1\theta\sigma, \dots, A_n\theta\sigma$ non è rifiutabile in P_2 , mentre lo è in P_1 .
- $O_{P_1} \neq O_{P_2}$ ($M_{P_1} \neq M_{P_2}$) contro l'ipotesi.]

- M_P è minimale rispetto all'enumerabile "successo"

$$W_{P_1}^{d_1} = W_{P_2}^{d_1} \Rightarrow M_{P_1} = M_{P_2}$$

- [basta prendere i sottoinsiemi composti dai soli goal atomici ground di $W_{P_1}^S$ e $W_{P_2}^S$, che coincidono con gli insiemi di successo]

- M_P non è AND-compositabile rispetto all'enumerabile "successo"

CAMBIAMO L'OSSERVABILE

(11) (12)

d_3 = "istanze ground" con le sostituzioni di riposta

$$\left\{ \langle G, \vartheta' \rangle \mid \begin{array}{l} G\vartheta' \text{ è ground,} \\ G \xrightarrow{\vartheta} \square, \\ G\vartheta' \text{ è un'istanza di } G\vartheta \end{array} \right\}$$

• M_P è corretto rispetto ad d_3

$$M_{P_1} = M_{P_2} \Rightarrow W_{P_1}^{d_3} = W_{P_2}^{d_3}$$

[• per esempio

$$\langle G, \vartheta \rangle \in W_{P_1}^{d_3} \quad \langle G, \vartheta \rangle \notin W_{P_2}^{d_3} \quad G = A_1, \dots, A_n$$

(ϑ è una sostituzione corretta per G in P_1 e non in P_2)

- per la completura $G\vartheta \xrightarrow{\varepsilon}_{P_2} \square$
- tutti gli atomi (ground) $A_1\vartheta, \dots, A_n\vartheta \in M_{P_2}$ e quindi anche $G\vartheta$
- $G\vartheta$ sarebbe ripostabile in P_2 e quindi (per la completura) ϑ sarebbe una sostituzione corretta per G in P_2

• M_P è minimale rispetto ad d_3

$$W_{P_1}^{d_3} = W_{P_2}^{d_3} \Rightarrow M_{P_1} = M_{P_2}$$

[• per G atomico, $\langle G, \vartheta \rangle \in W_P^{d_3} \Leftrightarrow G\vartheta \in M_P$]

• d_1 ed d_3 definiscono la stessa relazione di equivalenza fra programmi

- ma d_3 è migliore, perché è anche AND-componibile

LA SEMANTICA DEI GOAL RISPETTO AD α_3

$[G]_{Mp}$

("esecuzione" del goal nelle denotazioni)

le disjunte di procedure

$$[A]_{Mp} = \{ \langle A, \vartheta \rangle \mid \exists B \in Mp, \vartheta' = mgu(A, B) \text{ ristretto alle variabili di } A, A\vartheta \text{ è un'istanza ground di } A\vartheta' \}$$

la composizione di disjunte di procedure

$$[A, G]_{Mp} = \{ \langle (A, G), \vartheta \rangle \mid \exists \langle A', \vartheta' \rangle \in [A]_{Mp}, \exists \langle G', \vartheta'' \rangle \in [G]_{Mp}, \vartheta \text{ è la restrizione alle variabili di } (A, G) \text{ della sostituzione } \vartheta \circ \vartheta' \circ \vartheta'' \}$$

⊗ è un'operazione su sostituzioni definite come

- $e' = eqns(\vartheta')$
- $e'' = eqns(\vartheta'')$
- $\vartheta = mgu(eqns(\vartheta') \cup eqns(\vartheta''))$

il teorema di AND-compositionalità

per un qualunque goal G

$$\langle G, \vartheta \rangle \in Wp^{\alpha_3} \iff \langle G, \vartheta \rangle \in [G]_{Mp}$$

le osservazioni per un goal qualunque possono essere ottenute "eseguendo" il goal nelle denotazioni (Mp)

UN ESEMPIO

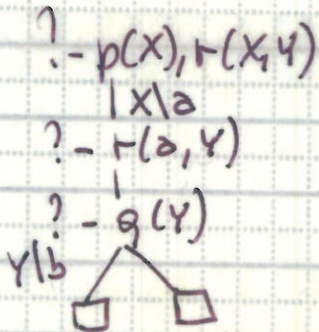
13 14

$p(a).$
 $q(b).$

$q(x).$
 $\neg(x,y) :- q(y).$

$$M_p = \{ p(a), q(a), q(b), \neg(a,a), \neg(a,b), \neg(b,a), \neg(b,b) \}$$

• vogliamo studiare il goal $?-p(x), \neg(x,y).$



gli elementi in W_p^{d3} relativi al goal

$$\langle p(x), \neg(x,y) \rangle, \{x|a, y|b\}$$

$$\langle p(x), \neg(x,y) \rangle, \{x|a, y|a\}$$

• l'escursione composizionale del goal in M_p

$$\llbracket p(x) \rrbracket_{M_p} = \{ \langle p(x), x|a \rangle \}$$

$$\llbracket \neg(x,y) \rrbracket_{M_p} = \{ \langle \neg(x,y), \{x|a, y|b\} \rangle, \langle \neg(x,y), \{x|a, y|b\} \rangle, \langle \neg(x,y), \{x|b, y|a\} \rangle, \langle \neg(x,y), \{x|b, y|b\} \rangle \}$$

nelle composizioni

$$\llbracket p(x), \neg(x,y) \rrbracket_{M_p}$$

ci sono 4 composizioni (\otimes) di sostituzioni, di cui solo 2 sono "unificabili"

il numero è esattamente la coppia di osservazioni in W_p^{d3}

M_p È UNA DENOTAZIONE DI UN INSIEME DI PROCEDURE?

14 15

- la denotazione di una procedura è tipicamente una funzione che (in un linguaggio senza stato) dare come applicata agli argomenti attuali della procedura, per calcolare l'operazione.
- Si può facilmente dimostrare che M_p può essere ottenuto calcolando l'operabile d_3 per tutti i goal atomici più generali.
 - questo è possibile in programmazione logica, perché possiamo eseguire una procedura lasciando tutti gli argomenti non specificati.
 - per molti operabili interessanti, della denotazione delle procedure non istanziate, siamo in grado di risolvere le variabili di una qualunque chiamata di procedura.

• abbiamo già visto che, per G atomico,
 $\langle G, \vartheta \rangle \in \omega_p^{d_3} \iff G \vartheta \in M_p$

• si può dimostrare che

$$\langle p(x_1, \dots, x_n), \vartheta \rangle \in \omega_p^{d_3} \iff p(x_1, \dots, x_n) \vartheta \in M_p$$

- l'insieme di successo (o M_p) può quindi essere definito in termini di d_3 come segue

$$O_p = \left\{ A \mid A \text{ è una istanza ground di } p(x_1, \dots, x_n) \vartheta, \right. \\ \left. ?- p(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\vartheta} \vartheta \right\}$$

• M_p non è OR-compositionale

- M_p non è corretto rispetto all'ontologia "risposte calcolate"

$$M_{P_1} = M_{P_2} \not\Rightarrow W_{P_1}^{dz} = W_{P_2}^{dz}$$

Controesempio

$$P_1 = \{ p(a), q(x) \}$$

$$P_2 = \{ p(a), q(a) \}$$

$$M_{P_1} = M_{P_2} = \{ p(a), q(a) \}$$

$$W_{P_1}^{dz} \neq W_{P_2}^{dz}, \text{ perché}$$

?-q(y) calcola la risposta γ/a in P_2
calcola la risposta vuota in P_1

- il problema sembra essere legato al fatto che con il modello minimo di Herbrand non si distingue tra termini non-ground e loro istanze

- una dimostrazione diversa, espressa in termini di termini non-ground

LA S-SEMANTICA

sostituzioni di risposta

Op = { A | A e una istanza ground di p(x1, ..., xn) d, ?- p(x1, ..., xn) -> p }

sostituzioni di risposte corrette ground

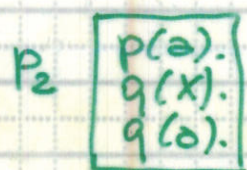
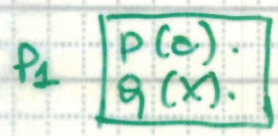
Op^c = { A | A e una istanza di p(x1, ..., xn) d, ?- p(x1, ..., xn) -> p }

sostituzioni di risposte corrette

- se vogliamo una denotazione corretta rispetto alle risposte calcolate, la soluzione più ovvia e quella di ottenere le sostituzioni di risposte calcolate

Op^s = { A | A = p(x1, ..., xn) d, ?- p(x1, ..., xn) -> p }

- anche la s-semantica non e un' altra proposta di Hebrant
- il dominio semantico e lo stesso delle c-semantice
- il controesempio non e piu tale



Op1^s = { p(a), q(x) } != Op2^s = { p(a), q(x), q(a) }

e non ne esistono altri, perche Op^s e effettivamente corretta rispetto ad d2.

CORRETTEZZA DI O_p^S

20

23

$$O_{P_1}^S = O_{P_2}^S \Rightarrow W_{P_1}^{d_2} = W_{P_2}^{d_2}$$

[

$$O_{P_1}^S = O_{P_2}^S$$



$$W_{O_{P_1}^S}^{d_2} = W_{O_{P_2}^S}^{d_2}$$



$$W_{P_1}^{d_2} = W_{P_2}^{d_2}$$

per la teorema precedente

]

MINIMALITA' DI O_p^S

$$W_{P_1}^{d_2} = W_{P_2}^{d_2} \Rightarrow O_{P_1}^S = O_{P_2}^S$$

[

ovvio, poiché $O_{P_i}^S$ è semplicemente il sottoinsieme di $W_{P_i}^{d_2}$ per i pool atomici più generali]

]

]

LA SEMANTICA DEI GOAL CON GIUNTIVI E LA AND-COMPOSIZIONALITA'

(24)

(21)

$$[A, G]_{Op^S}^{d_2} = \{ \langle (A, G), \nu \rangle \}$$

$$\exists \langle A', \nu' \rangle \in [A]_{Op^S}^{d_2}, \delta' = \text{mgu}(A, A')$$

$$\exists \langle G', \nu'' \rangle \in [G]_{Op^S}^{d_2}, \delta'' = \text{mgu}(G, G')$$

$$\nu \bar{\nu} \text{ le m.k. di } (A, G) \text{ sulle sostituzioni } \delta' \otimes \delta''$$

il teorema di AND-composizionalità:

per un qualunque goal G

$$\langle G, \nu \rangle \in Wp^{d_2} \quad \left(G \xrightarrow{p} \square \right)$$

se e solo se

$$\langle G, \nu \rangle \in [G]_{\text{max} Op^S}^{d_2}$$

$$\left(\begin{array}{l} G = A_1, \dots, A_n, \\ \exists B_1, \dots, B_n \text{ variabili di atomi in } Op^S \\ \nu' = \text{mgu}((A_1, \dots, A_n), (B_1, \dots, B_n)), \\ G\nu = G\nu' \end{array} \right)$$

- le risposte per un goal qualunque possono essere calcolate eseguendolo nelle clausole

UN ESEMPIO

(22) (25)

P

$$\begin{aligned} & q(f(a, y)). \\ & p(a). \\ & p(f(x, y)) = -p(x). \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}_P^S = \{q(f(a, y)), p(a), p(f(a, x)), p(f(f(a, x_1), x_2)), \dots\}$$

• Il pool $? - p(x), q(x)$.

risposta in P la risposta $x \setminus f(a, y)$

• la stessa risposta si ottiene eseguendo il pool in \mathcal{O}_P^S

LA DEFINIZIONE BOTTOM-UP DELLA

27

S-SEMANTICA

23

- come per M_P è possibile dare una equivalente definizione come minimo punto fisso di un operatore sulle conseguenze immediate
- da O_P a T_P

$$O_P = \left\{ A \mid A \text{ è una lit. ground di } p(x_1, \dots, x_n) \text{ e} \right. \\ \left. ?- p(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{p} \square \right\}$$

$$T_P(I) = \left\{ A \mid A :- B_1, \dots, B_n \text{ è un'istanza ground} \right. \\ \left. \text{di clausole di } P, \right. \\ \left. \{ B_1, \dots, B_n \} \subseteq I \right\}$$

↑
interpretazione di Herbrand

$$O_P^S = \left\{ A \mid A = p(x_1, \dots, x_n) \text{ e} \right. \\ \left. ?- p(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{p} \square \right\}$$

$$T_P^S(I) = \left\{ A \mid A' :- B_1, \dots, B_n \text{ è una clausola di } P, \right. \\ \left. \{ B_1', \dots, B_n' \} \subseteq I, \right. \\ \left. \mathcal{V} = \text{mgu}((B_1, \dots, B_n), (B_1', \dots, B_n')), \right. \\ \left. A = A' \mathcal{V} \right\}$$

↑
includi di atomi non ground (modulo unific.)

- si usano le clausole originali (non le loro istanze) e si unifica con l'mgu (esattamente come si fa nella risoluzione SLD)

LA S-SEMANTICA PUO' ESSERE DEFINITA BOTTOM-UP

24

29

- il teorema di equivalenza

$$\mathcal{O}_p^S = T_p^S \uparrow W$$

- abbiamo due semantiche equivalenti

- pu generalizzare "lo stile" delle semantiche tradizionali dei linguaggi logici, ci manca una nozione di semantica model-theoretic (olichiarativa).

- i domini semantici delle S-semantiche (e delle C-semantiche) sono interpretazioni?