La Trasformata di Fourier

Preliminari: Spazi di Hilbert

Da Wikipedia

In matematica uno **spazio di Hilbert** è uno spazio vettoriale che generalizza la nozione di spazio euclideo. Gli spazi di Hilbert sono stati introdotti dal celebre matematico David Hilbert all'inizio del XX secolo, ed hanno fornito un enorme contributo allo sviluppo dell'analisi funzionale ed armonica. L'interesse della nozione introdotta da Hilbert risiede nel fatto che essa evidenzia la conservazione di alcune proprietà degli spazi euclidei in spazi di funzioni infinito dimensionali. Grazie agli spazi di Hilbert è possibile formalizzare la teoria delle serie di Fourier e generalizzarla a basi arbitrarie.

Euristicamente, uno spazio di Hilbert è un insieme con una **struttura lineare** (spazio vettoriale), su cui è definito un **prodotto scalare** (in particolare, quindi, è possibile parlare di distanze, angoli, ortogonalità), e tale che sia garantita la completezza (ossia, che non vi siano dei comportamenti patologici nel processo di passaggio al limite). Nelle applicazioni, gli elementi di uno spazio di Hilbert (vettori) sono spesso successioni di numeri complessi o funzioni.

L'analisi armonica è la branca della matematica che studia la rappresentazione delle funzioni o dei segnali come sovrapposizione di onde fondamentali. Indaga e generalizza la nozione di serie di Fourier e trasformata di Fourier. Le onde fondamentali sono chiamate "armoniche", da cui il nome "analisi armonica". Nei precedenti due secoli è diventato un tema molto vasto con applicazioni in diverse aree come elaborazione numerica dei segnali, meccanica quantistica e neuroscienze.

L'Analisi di Fourier

Serie di Fourier

Data una funzione f(t) reale o complessa a quadrato sommabile, periodica di periodo 2π, per ogni n intero esistono i coefficienti complessi

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)\,dt$$

e la funzione può essere rappresentata come

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

nel caso f(t) sia reale si può sfruttare la relazione di Eulero

$$e^{inx} = \cos(nx) + \sin(nx)$$

e scrivere

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx) f(t)dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx) f(t)dt,$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

complicandosi decisamente la vita.

L'interpretazione dello sviluppo in serie di Fourier è che un segnale periodico di potenza finita (a questo equivale la condizione del quadrato sommabile) si può sviluppare come combinazione lineare di funzioni periodiche semplici la cui frequenza è un numero intero.

Il tutto si generalizza facilmente al caso in cui il periodo sia T e quindi la frequenza fondamentale abbia il valore 1/T.

Integrale di Fourier

Si definisce

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} f(t)dt$$

ovvero si considera il valore principale nel senso di Cauchy; allora data una funzione f(t) reale o complessa a quadrato sommabile, sotto opportune condizioni analitiche, che in questo ambito trascuriamo, vale la coppia di trasformate

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt$$

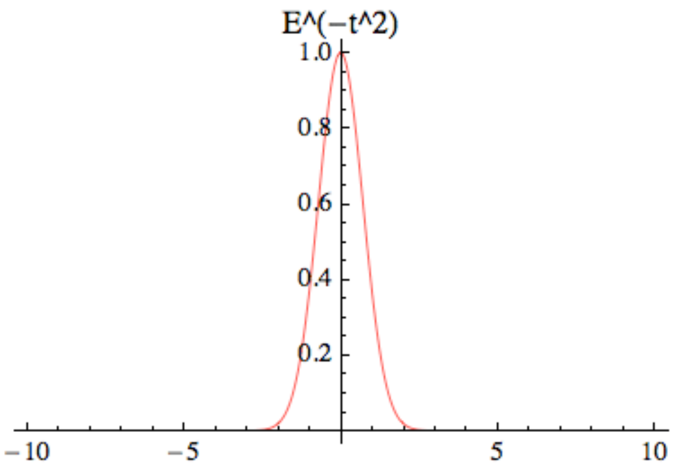
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$$

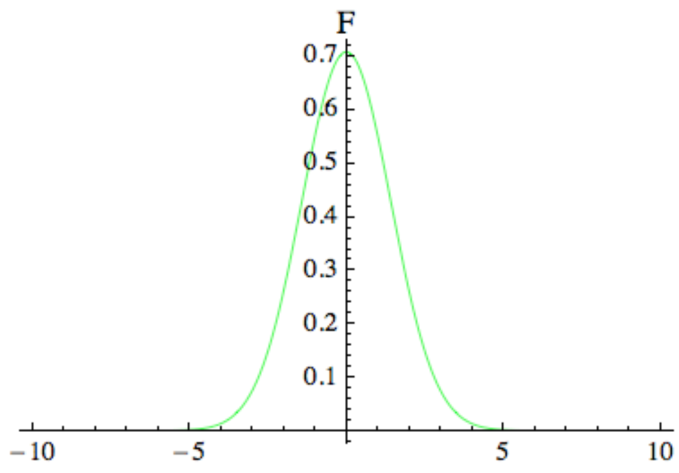
La funzione F(ω) viene detta **integrale di Fourier** o **Trasformata continua di Fourier** (**CFT**) della funzione f(t). L'**integrale di Fourier** sviluppa una funzione aperiodica nelle sue componenti di frequenza, si dice che si passa dal dominio del tempo al dominio della frequenza. Una proprietà fondamentale della CFT è che quanto è più *concentrata* la funzione tanto più *dispersa* è la trasformata e viceversa.

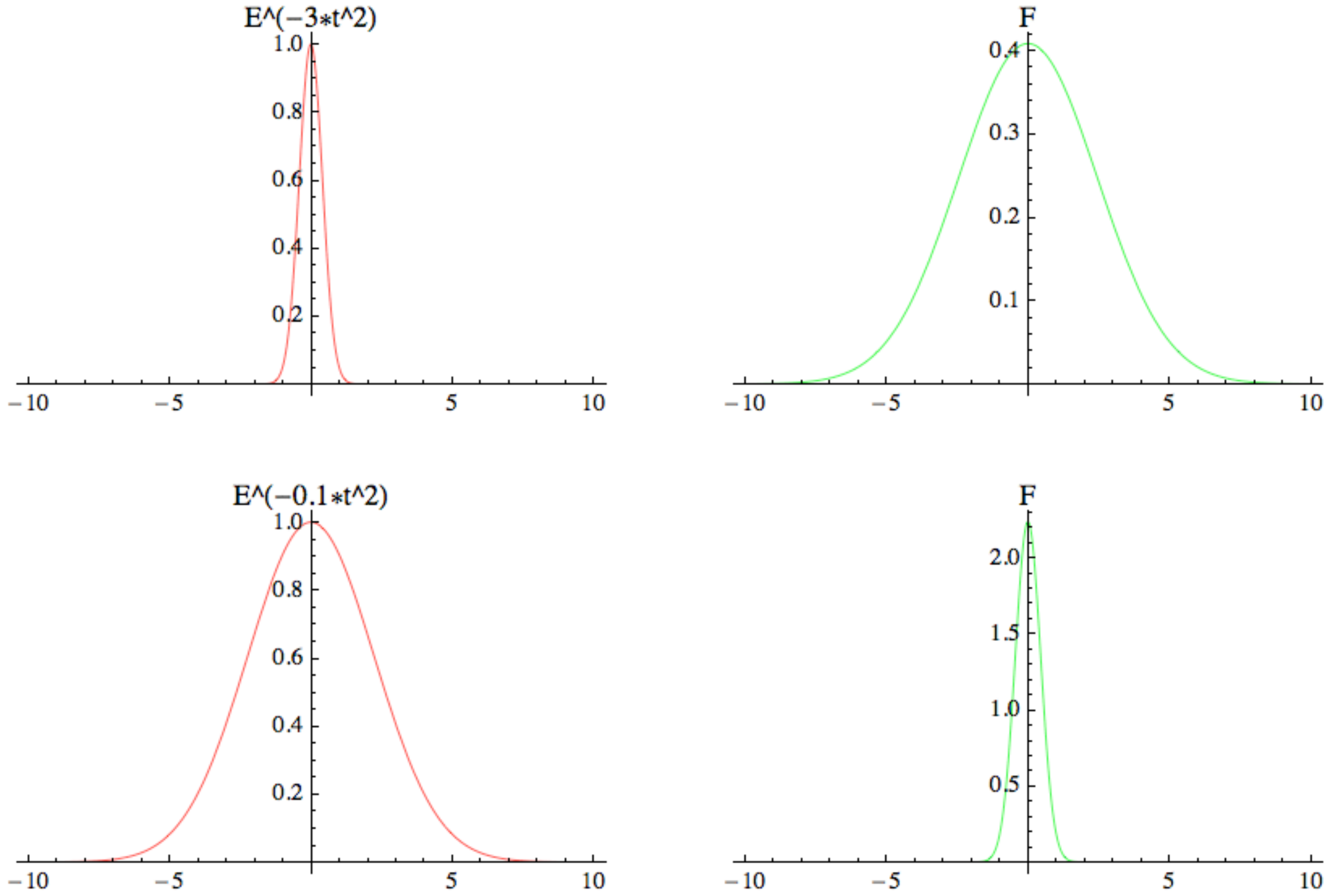
Vediamo alcuni esempi di coppie di trasformate.

Gaussiana

La CFT di una gaussiana è ancora una gaussiana.

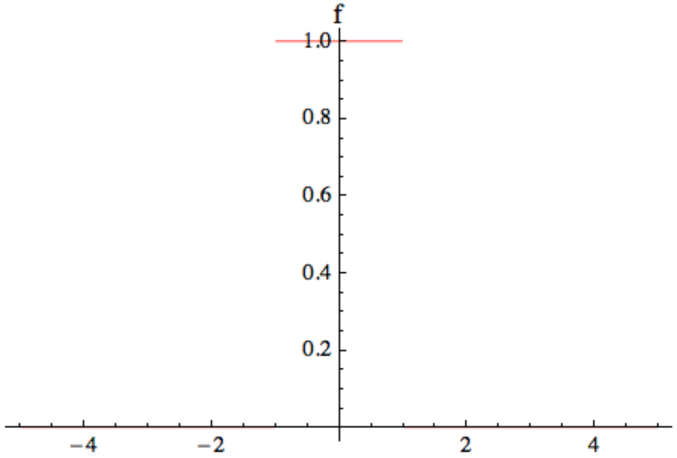


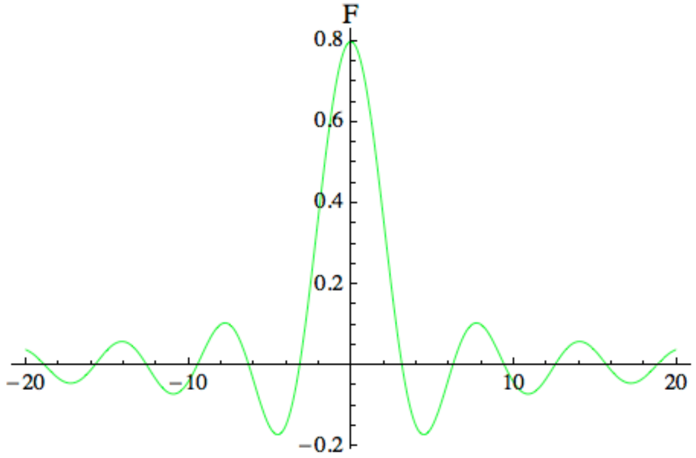


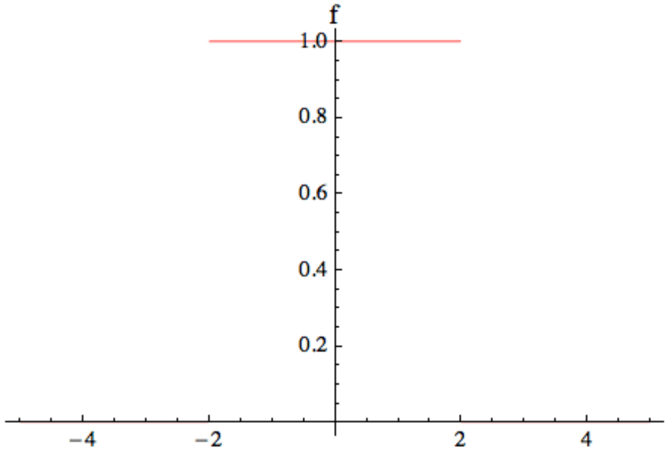


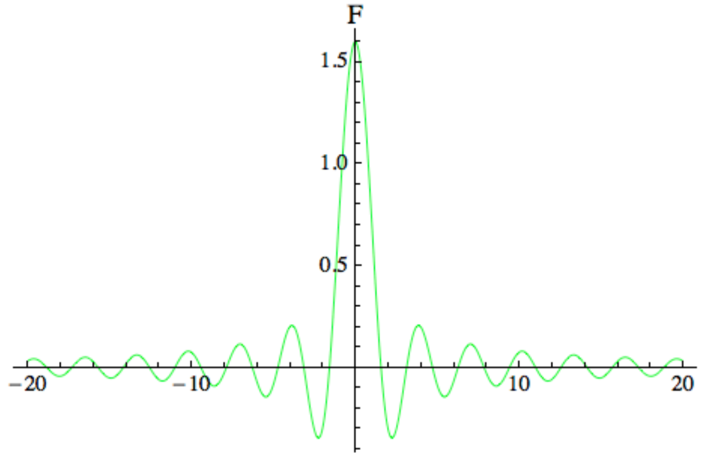
Impulso rettangolare

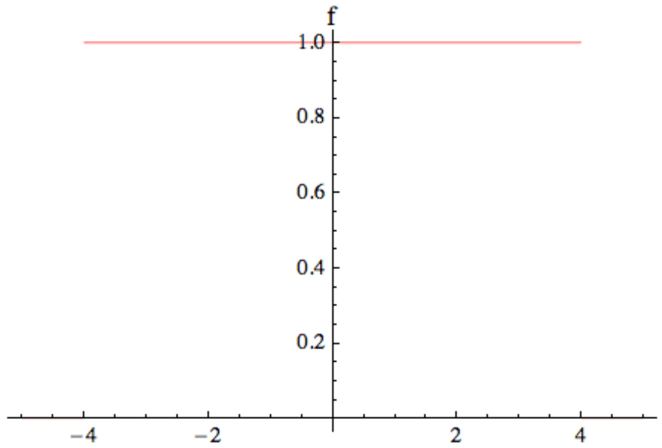
La CFT di un impulso rettangolare è un sinc = sin t/t (e viceversa).

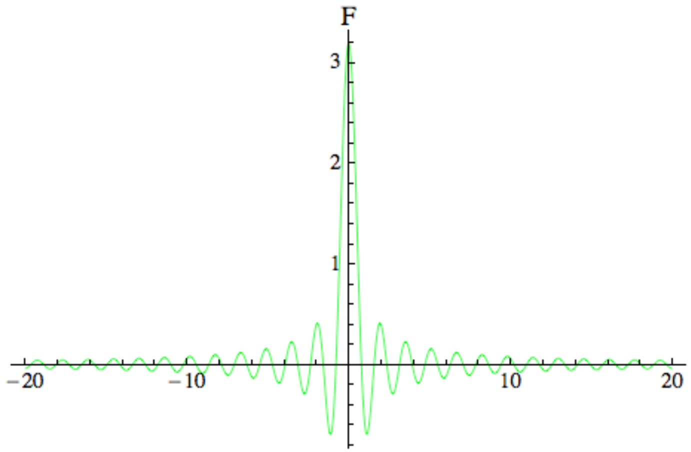

f
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−4
−2
2
4


F
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−20
−10
10
20


f
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−4
−2
2
4

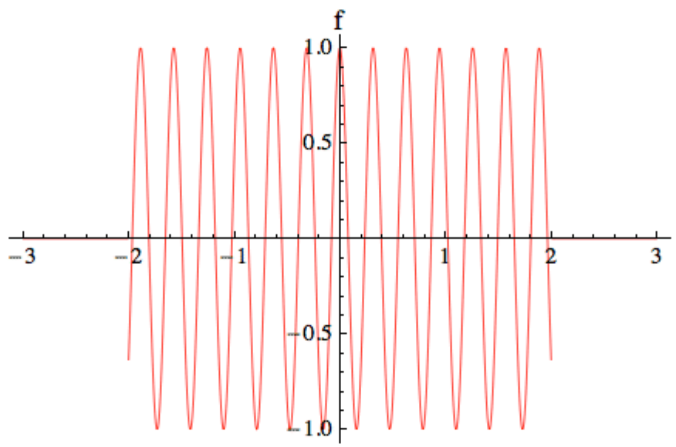

F
1.5
1.0
0.5
−20
−10
10
20

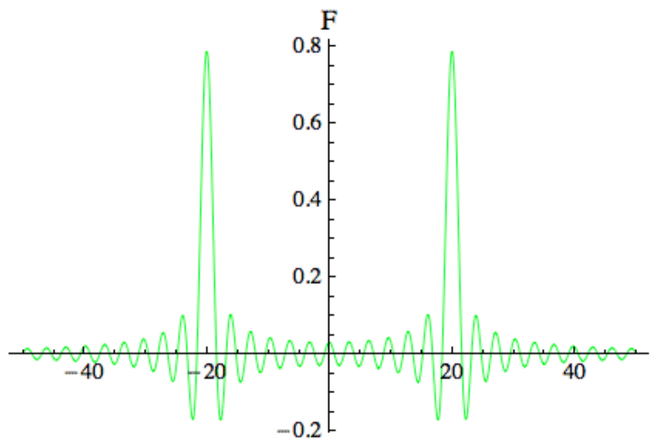




Sinusoide troncata

La CFT di una sinusoide troncata è una coppia di sinc





La delta di Dirac

Consideriamo una serie di impulsi (per esempio rettangolari o sinc o gaussiani) con integrale costante uguale ad 1 e ampiezza decrescente, in tutti e tre i casi si converge ad una funzione generalizzata **δ(t)** che nello 0 vale infinito, da tutte le altri parti vale 0 e ha integrale 1 e per cui vale la proprietà caratteristica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

In modo più preciso δ(t) si può dire che è un funzionale che associa a una funzione continua il suo valore nello zero. Questo oggetto strano è anche chiamato **impulso** e permette, tra l'altro di correlare la CFT con la serie di Fourier. Poiché la trasformata di

$$e^{int}$$

Vale

$$\delta(\omega + n)$$

Allora se

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

Vale

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}\right]dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{int} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega + n)$$

Ovvero la trasformata di una funzione periodica è un **pettine**, cioè la somma di infiniti impulsi equispaziati aventi come coefficiente il coefficiente corrispondente della serie di Fourier.

Trasformata discreta di Fourier (DFT)

Dati N numeri complessi $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ vale la coppia di trasformazioni:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N}kn}, \quad n = 0, \ldots, N-1$$

Si noti che le quantità

$$W_N^k = e^{-\frac{2\pi i}{N}k}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

sono le N radici N-esime dell’unità

La **Trasformata Discreta di Fourier** è l'unica che si può effettivamente calcolare ed ha importanti relazioni sia con la serie che con l'integrale, che con il calcolo di operazioni su polinomi. La DFT può essere interpretata come gli insieme dei valori che il polinomio di grado N-1

$$p(u) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n u^k$$

assume nelle radici N-esime dell'unità.

Inoltre se si valuta una funzione periodica in un numero finito di punti equidistanti e se ne fa la **DFT** si ottiene un insieme di valori che sotto opportune condizioni analitiche approssimano i coefficienti della **serie di Fourier**.

Trasformata veloce di Fourier, Fast Fourier Trasform

A prima vista la **DFT** ha una complessità quadratica in N dovendo calcolare N somme di N termini. È però facile dimostrare l'esistenza di un algoritmo che effettua lo stesso calcolo in O(N log N) operazioni.

Per semplicità restringiamoci al caso in cui N è potenza di due e sia N =2M. Si deve calcolare

$$X_k = \sum_{n=0}^{2M-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{2M}kn} = \sum_{n=0}^{2M-1} x_n W_{2M}^{nk}, \quad k = 0,\dots,2M-1$$

Separiamo le componenti pare e quelle dispari della sommatoria, tenendo conto che

$$W_{2M}^{2nk} = W_M^{nk}$$

si ha

$$X_k = \sum_{n=0}^{M-1} x_{2n} W_{2M}^{2nk} + \sum_{n=0}^{M-1} x_{2n+1} W_{2M}^{(2n+1)k} = \sum_{n=0}^{M-1} x_{2n} W_M^{nk} + W_{2M}^{k} \sum_{n=0}^{M-1} x_{2n+1} W_M^{nk}, \quad k = 0,\ldots,2M-1$$

Ovvero la **FFT** di ordine 2M si può calcolare con due FFT di ordine M e M moltiplicazioni per una costante complessa. Detta C(n) la complessità della FFT di ordine n si ottiene

$$C(n) = 2\, C(n/2) + O(n)$$

E quindi

$$C(n) = O(n \log n))$$