Tecniche di Specifica e Dimostrazione

Prova scritta del 6 aprile 2005

Esercizio 1 (15 punti)

Si considerino i comandi:

$$w \;=\; \textbf{while}\; y < n\; \textbf{do}\,(\,x := x + 2y + 1;\; y := y + 1\,) \qquad \text{e} \qquad c \;=\; x := 0;\; y := 0;\; w$$

Si dimostri che, per ogni $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ con $\langle w, \sigma\rangle \to \sigma'$,

$$\text{se}\;\; \sigma(x) = \sigma(y)^2,\; 0 \leq \sigma(y) \leq n$$

$$\text{allora}\; \sigma' = \sigma[n^2/x, n/y].$$

Si dimostri quindi che se $0 \leq n$ allora $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma[n^2/x, n/y]$.

Esercizio 2 (8 punti)

Si consideri l'insieme Ch, ordinato per inclusione, formato da certi insiemi S di elementi appartenenti ad un ordinamento parziale $(D, \sqsubseteq)$. Per essere $S \in Ch \subseteq \mathcal{P}(D)$, un insieme $S \subseteq D$ deve essere *chiuso verso il basso*, cioè se $s \in S$ e $s' \sqsubseteq s$ allora anche $s' \in S$.

Si dimostri che $(Ch, \subseteq)$ è un ordinamento parziale completo con bottom. Si consideri quindi la funzione

$$F : \mathcal{P}(D) \to Ch \qquad \text{definita come} \qquad F(I) = \{s \mid s \sqsubseteq s',\, s' \in I\}$$

e si faccia vedere che effettivamente $F(I) \in Ch$. Si dimostri infine che F è monotona continua, dove anche l'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ delle parti di D è ordinato per inclusione.

Esercizio 3 (7 punti)

Si dimostri che i due comandi:

$$c_1 \;= \textbf{while}\; x < 0\; \textbf{do}\; x := -x \qquad \text{e} \qquad c_2 \;= \textbf{if}\; x < 0\; \textbf{then}\; x := -x\; \textbf{else}\; \mathit{skip}$$

hanno la stessa semantica denotazionale. Concludere da questo che anche

$$\textbf{while}\; b\; \textbf{do}\; c_1 \qquad \text{e} \qquad \textbf{while}\; b\; \textbf{do}\; c_2$$

hanno la stessa semantica denotazionale.