Fondamenti dell'Informatica: Semantica

Prova scritta dell'11 Giugno 1998

Coloro che intendono fare solo la prima parte devono svolgere gli esercizi $1, 2$ e 3.
Coloro che intendono fare solo la seconda parte devono svolgere gli esercizi $3, 4$ e 5.

Esercizio 1 (8 punti per la I parte) (5 punti per il compito intero)

Assumendo che valga $Rem(x, y, z)$ se e solo se z è il resto della divisione tra x e y, si considerino le seguenti regole di inferenza, dove le variabili stanno per numeri naturali.

$$\frac{}{Q(x,1)} \qquad\qquad \frac{Rem(x,y+2,z) \quad z\neq 0 \quad Q(x,y+1)}{Q(x,y+2)} \qquad\qquad \frac{Q(x+1,x)}{P(x+1)}$$

Si dimostri per induzione sulle regole che $\forall x \in \mathbb{N}.\ P(x) \Rightarrow x$ è primo.

Esercizio 2 (12 punti per la I parte) (7 punti per il compito intero)

Si consideri il CPO con bottom $(\mathcal{P}(\omega), \subseteq)$ costituito dagli insiemi di numeri naturali, $S \subseteq \omega$, ordinati per inclusione. Le funzioni $f, g : \mathcal{P}(\omega) \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)$ così definite:

$$f = \lambda S.\ S \cap X \qquad h = \lambda S.\ (\omega \setminus S) \cap X \qquad \text{dove } X \subseteq \omega$$

sono monotone? Sono continue? La risposta dipende da X?

Esercizio 3 (10 punti per la I o II parte) (6 punti per il compito intero)

Si fornisca la semantica operazionale e denotazionale del nuovo costrutto **IMP**.

$$\begin{array}{rl} \textbf{case2} & a \quad \textbf{of} \\ n_1: & c_1 \\ n_2: & c_2 \\ \textbf{otherwise}: & c_3 \qquad\qquad \text{dove } n_1 \neq n_2 \end{array}$$

che esegue c_1, c_2 o c_3 a seconda che la valutazione di a fornisca n_1 o n_2 o un altro numero intero.

Esercizio 4 (5 punti per la II parte) (3 punti per il compito intero)

Si estenda la dimostrazione di equivalenza delle due semantiche a **IMP** con **case2**, dimostrando i casi relativi al nuovo costrutto.

Esercizio 5 (15 punti per la II parte) (9 punti per il compito intero)

Calcolare il tipo del termine $\textbf{rec}f.\ \lambda x.\ \lambda y.\ \textbf{if}\ x - y\ \textbf{then}\ 0\ \textbf{else}\ ((fy)x)$ e la sua denotazione, calcolando esplicitamente eventuali punti fissi.