Fondamenti dell'Informatica: Semantica

Prova scritta dell'11 settembre 2007

Esercizio 1 (9 punti)

Si dimostri per induzione matematica che, se l'identificatore x non appare in c,

$$\mathcal{C}[\![\mathbf{while}\ x \neq 0\ \mathbf{do}\ (x := x - 1\ ;\ c)]\!]\sigma[n/x] \ = \ (\mathcal{C}[\![c]\!])^n\sigma[0/x] \qquad\qquad n \in \omega$$

dove $\varphi^0\sigma = \sigma$ e $\varphi^{n+1}\sigma = (\varphi^n)^*(\varphi\sigma)$.

(Cenno: si usino le proprieta' che: (i) $\Gamma(\mathcal{C}[\![w]\!]) = \mathcal{C}[\![w]\!]$; e che: (ii) se x non appare in c, allora $\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma[k/x] = \perp$ se $\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma = \perp$, mentre $\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma[k/x] = (\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma)[k/x]$ altrimenti).

Esercizio 2 (8 punti)

Date le regole

$$\frac{}{n \text{ div } 0} \qquad \frac{n \text{ div } k}{n \text{ div } (n+k)}$$

si dimostri che

$$n \text{ div } m \quad \Longleftrightarrow \quad \exists l.\ nl = m.$$

(Suggerimento: per la parte $\Longleftarrow$ si dimostri la proprieta' $\forall l.\ nl = m$ implica $n \text{ div } m$.)

Esercizio 3 (8 punti)

1. Si dimostri l'implicazione $[\![t_1]\!]\rho \ = \ [\![t_2]\!]\rho \ \Rightarrow \ [\![(t_1\ x)]\!]\rho \ = \ [\![(t_2\ x)]\!]\rho$
2. Si dimostri con un controesempio che l'implicazione inversa non vale in generale. Si dica anche quali condizioni sono necessarie affinche' essa valga.
3. Si dimostri usando il lemma di sostituzione la proprieta' generale

   $$[\![t_1]\!]\rho \ = \ [\![t_2]\!]\rho \ \Rightarrow \ [\![t[t_1/x]]\!]\rho \ = \ [\![t[t_2/x]]\!]\rho$$

   valida per tutti i termini t e per $x \notin FV(t_1, t_2)$. Si osservi infine che l'implicazione diretta e' un caso speciale di tale proprieta' generale.

Esercizio 4 (5 punti)

Due agenti CCS p e q sono detti *equivalenti per tracce* se possono fare le stesse sequenze finite di mosse:

$$\{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n | p \xrightarrow{\mu_1}\xrightarrow{\mu_2} \ldots \xrightarrow{\mu_n}\} = \{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n | q \xrightarrow{\mu_1}\xrightarrow{\mu_2} \ldots \xrightarrow{\mu_n}\}$$

Si dimostri che (i) due agenti bisimilari sono anche equivalenti per tracce; (ii) esistono agenti equivalenti per tracce che non sono bisimilari.