Fondamenti dell'Informatica: Semantica

Prova scritta del 15 Giugno 1999

(Recupero 1^o compitino: Esercizi 1 e 2 Recupero 2^o compitino: Esercizi 3 e 4)

Esercizio 1 (18 punti)

Sia R una relazione su un insieme A, ovvero $R \subseteq A \times A$. Si consideri la relazione R^+, detta *chiusura transitiva* di R, definita dalle seguenti due regole:

$$\frac{x R y}{x R^+ y} \qquad\qquad \frac{x R^+ y \quad y R^+ z}{x R^+ z}$$

a) Si dimostri che per ogni x e y

$$x R^+ y \quad \Leftrightarrow \quad \exists k > 0.\ \exists z_0, \ldots, z_k.\ x = z_0 \ \wedge\ z_0 R z_1 \ \wedge\ \ldots \wedge\ z_{k-1} R z_k \ \wedge\ z_k = y$$

(Suggerimento: si dimostri l'implicazione $\Rightarrow$ per induzione sulle regole e l'implicazione $\Leftarrow$ per induzione sulla lunghezza k della R-catena).

b) Quali regole definiscono una relazione R' che soddisfi invece

$$x R' y \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \geq 0.\ \exists z_0, \ldots, z_k.\ x = z_0 \ \wedge\ z_0 R z_1 \ \wedge\ \ldots \wedge\ z_{k-1} R z_k \ \wedge\ z_k = y.$$

Esercizio 2 (12 punti)

Si dimostri che

$$\mathcal{C}[\![\textbf{while } x \neq 0 \textbf{ do } y := y + 1]\!] = \mathcal{C}[\![\textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } (\textbf{while true do } y := y - 1) \textbf{ else skip}]\!].$$

Esercizio 3 (16 punti)

Si aggiunga ai comandi di **IMP** il costrutto

$$x \leftrightarrow y,$$

il cui effetto è quello di scambiare il contenuto delle variabili x e y.

a) Dare al nuovo comando una semantica operazionale e denotazionale.

b) Estendere la prova di equivalenza delle semantiche vista a lezione, trattando il caso del comando introdotto.

Esercizio 4 (14 punti)

Stabilire sotto quali condizioni i due termini HOFL

$$t = (\lambda x.\, (t_1 x)\, t_2) \qquad e \qquad t' = (t_1 t_2),$$

hanno

a) lo stesso tipo;

b) la stessa semantica denotazionale lazy.