Fondamenti dell'Informatica: Semantica

Prova scritta del 16 aprile 1999

Esercizio 1

Si indichi con w il comando del linguaggio IMP

$$\textbf{while } x \neq 0 \textbf{ do } (x := x - 1;\ y := y + 1).$$

Si provi per induzione sulle regole che, dati comunque gli stati σ e σ',

$$\langle w, \sigma \rangle \to \sigma' \quad \Rightarrow \quad \sigma(x) \geq 0 \ \wedge\ \sigma' = \sigma\left[{}^{\sigma(x)+\sigma(y)}/_{y},\ {}^{0}/_{x}\right].$$

Esercizio 2

Sia $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ un insieme parzialmente ordinato. Un *ideale* di P è un sottoinsieme $I \subseteq P$, $I \neq \emptyset$ tale che

(i) $\forall x \in I.\ \forall y \in P.\ y \sqsubseteq x \ \Rightarrow\ y \in I$ (chiusura verso il basso);

(ii) $\forall x, y \in I.\ \exists z \in I.\ x \sqsubseteq z \ \wedge\ y \sqsubseteq z$ (esistenza di maggioranti per ogni coppia di elementi).

Sia $\mathsf{Idl}(P)$ l'insieme di tutti gli ideali di P, cioè $\mathsf{Idl}(P) = \{I \subseteq P \mid I \text{ è un ideale}\}$. Si consideri $\mathsf{Idl}(P)$ con la relazione di inclusione insiemistica, cioè $\langle \mathsf{Idl}(P), \subseteq \rangle$, e si provi che

(a) $\langle \mathsf{Idl}(P), \subseteq \rangle$ è un ordine parziale;

(b) $\langle \mathsf{Idl}(P), \subseteq \rangle$ è un cpo.

Esercizio 3

Utilizzando la semantica denotazionale, si dimostri l'equivalenza dei comandi IMP c_1 e c_2

$$c_1 \stackrel{def}{=} \textbf{while } x \neq 0 \textbf{ do } x := x - 1$$

$$c_2 \stackrel{def}{=} \textbf{if } x < 0 \textbf{ then } (\textbf{while true do skip}) \textbf{ else } x := 0$$