Fondamenti dell'Informatica: Semantica

Prova scritta del 17 Settembre 2001

Esercizio 1 (12 punti)

Si estenda il linguaggio **IMP** con il costrutto

$$\textbf{while } [b, n] \textbf{ do } C$$

la cui semantica denotazionale è definita nel modo seguente:

$\mathcal{C}[\![\textbf{while } [b,\ 0] \textbf{ do } C]\!]\sigma = \perp_{\Sigma_\perp}$,

$\mathcal{C}[\![\textbf{while } [b,\ n+1] \textbf{ do } C]\!]\sigma = \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma \rightarrow \mathcal{C}[\![\textbf{while } [b,\ n] \textbf{ do } C]\!]^*(\mathcal{C}[\![C]\!]\sigma),\ \sigma$.

1. Si spieghi perché la definizione della semantica del nuovo costrutto non è una buona definizione per ricorsione strutturale.
2. Si definisca una relazione ben fondata sull'insieme dei comandi, secondo la quale la definizione della semantica del nuovo costrutto sia ben data (Sugg.: La nuova relazione dovrebbe combinare opportunamente la relazione di sottotermine e l'usuale ordine sui naturali).
3. Assumendo di aver svolto il punto precedente, si provi che

   $$\mathcal{C}[\![\textbf{while } [b,\ n] \textbf{ do } C]\!] = \Gamma^n(\lambda\sigma.\perp_{\Sigma_\perp}),$$

   dove Γ è l'operatore utilizzato per definire la semantica dell'usuale costrutto **while**, cioè $\mathcal{C}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } C]\!] = \mathit{fix}(\Gamma)$.

Esercizio 2 (10 punti)

Si consideri il dominio $V_{\textbf{int}\rightarrow\textbf{int}}$ (ovvero $[(\mathbf{N})_\perp \rightarrow (\mathbf{N})_\perp]$, il cpo delle funzioni continue sul lifting del dominio discreto degli interi).

1. Esistono catene infinite in $V_{\textbf{int}\rightarrow\textbf{int}}$? In caso affermativo se ne definisca esplicitamente una.
2. Il cpo $V_{\textbf{int}\rightarrow\textbf{int}}$ ha elemento minimo (bottom) $\perp_{V_{\textbf{int}\rightarrow\textbf{int}}}$? Qual è?
3. Fornire un termine HOFL la cui denotazione sia $\lfloor\perp_{V_{\textbf{int}\rightarrow\textbf{int}}}\rfloor \in (V_{\textbf{int}\rightarrow\textbf{int}})_\perp$.
4. Dato un dominio D, un elemento $d \in D$ si dice *massimale* in D se $\forall d' \in D.\ d \sqsubseteq d' \ \Rightarrow d = d'$.

   L'elemento $[\![\lambda x.\ \textbf{if } x \textbf{ then } 1 \textbf{ else } 1]\!]\rho \in (V_{\textbf{int}\rightarrow\textbf{int}})_\perp$ è massimale ?
5. Si caratterizzino gli elementi massimali di $(V_{\textbf{int}\rightarrow\textbf{int}})_\perp$.

Esercizio 3 (8 punti)

Si dimostri formalmente che

$$\text{se} \quad x \notin FV(t) \quad \text{allora} \quad \textbf{rec } x.t \sim t$$

usando prima la semantica operazionale di HOFL e poi quella denotazionale.