Fondamenti dell'Informatica: Semantica

Prova scritta del 21 Settembre 1999

Esercizio 1 (14 punti)

Si estenda il linguaggio **IMP** con il costrutto

$$\mathbf{while}\ [b, n]\ \mathbf{do}\ C$$

la cui semantica denotazionale è definita nel modo seguente:

$$\mathcal{C}[\![\mathbf{while}\ [b,\ 0]\ \mathbf{do}\ C]\!]\sigma = \bot_{\Sigma_\bot},$$
$$\mathcal{C}[\![\mathbf{while}\ [b,\ n+1]\ \mathbf{do}\ C]\!]\sigma = \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma\ \rightarrow\ \mathcal{C}[\![\mathbf{while}\ [b,\ n]\ \mathbf{do}\ C]\!]^*(\mathcal{C}[\![C]\!]\sigma),\ \sigma.$$

1. Si spieghi perché la definizione della semantica del nuovo costrutto non è una buona definizione per ricorsione strutturale.
2. Si definisca una relazione ben fondata sull'insieme dei comandi, secondo la quale la definizione della semantica del nuovo costrutto sia ben data (Sugg.: La nuova relazione dovrebbe combinare opportunamente la relazione di sottotermine e l'usuale ordine sui naturali).
3. Assumendo di aver svolto il punto precedente, si provi che

   $$\mathcal{C}[\![\mathbf{while}\ [b,\ n]\ \mathbf{do}\ C]\!] = \Gamma^n(\lambda\,\sigma.\bot_{\Sigma_\bot}),$$

   dove Γ è l'operatore utilizzato per definire la semantica dell'usuale costrutto **while**, cioè $\mathcal{C}[\![\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ C]\!] = \mathit{fix}(\Gamma)$.

Esercizio 2 (7 punti)

Si verifichi se il seguente termine HOFL è tipabile, ed eventualmente se ne fornisca il tipo

$$\mathbf{rec}\,f.\ \lambda\,x.\ \mathbf{if}\ \mathbf{snd}(x)\ \mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}\ 1 + (f\ \mathbf{snd}(x))$$

Esercizio 3 (9 punti)

Si dimostri che dati due termini t e t' del linguaggio HOFL, con t' termine chiuso, vale

$$FV(t\,[t'/x]) = FV(t) \setminus \{x\}.$$

Si consideri la regola per la valutazione dell'applicazione:

$$\frac{t \to \lambda x.\,t' \qquad t'\,[t''/x] \to c}{(t\ t'') \to c}$$

e, utilizzando il punto precedente, si dimostri che se t'' è un termine chiuso e $\lambda x.\,t'$ è una forma canonica, allora $t'\,[t''/x]$ è anch'esso un termine chiuso.