Fondamenti dell'Informatica: Semantica

Prova scritta del 27 Marzo 2000

Esercizio 1 (8 punti)

Si dimostri che i comandi

$$\textbf{while } X \geq 0 \textbf{ do } X := X + 1 \qquad \textbf{while } X \geq 0 \textbf{ do } X := X + 2$$

sono equivalenti, cioè $\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma$

$$\langle \textbf{while } X \geq 0 \textbf{ do } X := X + 1, \sigma \rangle \to \sigma' \quad \text{sse} \quad \langle \textbf{while } X \geq 0 \textbf{ do } X := X + 2, \sigma \rangle \to \sigma'.$$

Esercizio 2 (12 punti)

Sia $(D, \sqsubseteq)$ un ordine parziale, e sia $H \subseteq D \times D$ il suo diagramma di Hasse, ovvero la relazione definita come

$$\frac{}{xRx} \qquad \frac{x \sqsubseteq y \quad y \sqsubseteq z \quad x \neq y \quad y \neq z}{xRz} \qquad H = \sqsubseteq - R$$

Si noti che il diagramma di Hasse, almeno con D finito, si ottiene eliminando tutti gli archi inutili, ovvero quelli che si potrebbero comunque ottenere per riflessività o transitività.

a) Dimostrare per induzione sulle regole che, detta H^* la chiusura riflessiva e transitiva di H definita come

$$\frac{}{xH^*x} \qquad \frac{xHy}{xH^*y} \qquad \frac{xH^*y \qquad yH^*z}{xH^*z}$$

si ha

$$xH^*y \Rightarrow x \sqsubseteq y.$$

b) Dimostrare che H^* è un ordine parziale.

c) Dato $(\omega \cup \{\infty\}, \sqsubseteq)$ con $n \leq m \Rightarrow n \sqsubseteq m$ e $\forall x.\ x \sqsubseteq \infty$, verificare se $H^* = \sqsubseteq$.

Esercizio 3 (10 punti)

Si dimostri che i comandi

$$X := 0 \qquad \text{e} \qquad X := 0; \textbf{while } X \neq 0 \textbf{ do } c$$

hanno la stessa semantica denotazionale.
(Suggerimento: si noti che vale $\mathcal{C}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!] = \Gamma(\mathcal{C}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!])$.)