RICERCA OPERATIVA (a.a. 2003/04)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{M}}$ **Matricola** Corso $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$

1) Per potenziare il servizio sanitario in un'area rurale poco sviluppata, si decide l'apertura di nuovi presidi ospedalieri per servire sei comunità, nel seguito indicate mediante le lettere A, B, C, D, E e F. Dopo un'attenta analisi, si individuano tre zone candidate all'apertura di un nuovo presidio: α, β e γ. Le comunità A, B e C distano 20 Km da α, 8 km da β e 10 km da γ. Le comunità D e E, invece, distano 5 km da α, 10 km da β e 30 km da γ. F, infine, dista 5 km da α e 40 km da β e γ.

Per garantire un servizio di qualità, si vuole che ogni comunità disti non più di 10 km da almeno uno dei presidi ospedalieri aperti.

L'apertura di un presidio in α richiede un investimento di 50.000 Euro, in β di 70.000 Euro ed in γ di 60.000 Euro. Sapendo che, per il potenziamento sanitario, è stato messo a disposizione un budget di 110.000 Euro, si formuli in termini di P.L.I. il problema di stabilire in quali delle tre zone candidate aprire un presidio, in modo da garantire la qualità del servizio (cioè distanza non superiore a 10 km per ogni comunità), non superare il budget e minimizzare il numero di presidi ospedalieri aperti.

SVOLGIMENTO

Siano y_α, y_β e y_γ tre variabili binarie utilizzate per indicare, rispettivamente, l'apertura o meno di un presidio ospedaliero in α, β e γ.

Alle comunità A, B e C viene garantito un servizio di qualità solo se viene aperto un presidio in β o in γ (o in entrambe le zone); quindi deve essere:

$$y_\beta + y_\gamma \geq 1.$$

Per quanto riguarda D e E, le zone situate a una distanza non superiore a $10km$ sono α e β; la garanzia della qualità del servizio è quindi espressa dal vincolo:

$$y_\alpha + y_\beta \geq 1.$$

La comunità F, invece, è soddisfatta solo dall'apertura di un presidio in α:

$$y_\alpha \geq 1.$$

Il vincolo di budget (dopo aver diviso ogni voce costo per 10.000) è formulabile mediante:

$$5y_\alpha + 7y_\beta + 6y_\gamma \leq 11.$$

Il problema può quindi essere formulato nel seguente modo:

$$\begin{array}{lrrrcr}
\min & y_\alpha & +y_\beta & +y_\gamma & & \\
 & & y_\beta & +y_\gamma & \geq & 1 \\
 & y_\alpha & +y_\beta & & \geq & 1 \\
 & y_\alpha & & & \geq & 1 \\
 & 5y_\alpha & +7y_\beta & +6y_\gamma & \leq & 11 \\
 & y_\alpha, & y_\beta, & y_\gamma & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

2) Fornire le definizioni di soluzione di base primale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere, e di soluzione di base duale, ammissibile e non ammissibile, degenere e non degenere.

Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{lrrrl}
\max & & & x_3 & \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 1 \\
& x_1 & & +x_3 & \leq 2 \\
& x_1 & & & \leq 1 \\
& & x_2 & & \leq 1 \\
& & & x_3 & \leq 1
\end{array}
$$

Fornire una soluzione di base primale degenere e non ammissibile ed una soluzione di base duale degenere e non ammissibile. Giustificare la risposta applicando le definizioni date sopra.

SVOLGIMENTO

Sia data la coppia di problemi di PL:

$$
\begin{array}{llll}
(P) & \max & cx & \\
& & Ax & \leq b
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{llll}
(D) & \min & yb & \\
& & yA & = c \\
& & y & \geq 0
\end{array}
$$

Una soluzione primale $\overline{x}$ è di base se è soluzione di un sistema del tipo $A_B x = b_B$, dove B è una base, cioè un insieme di indici tale che la matrice A_B sia quadrata, di rango massimo e non singolare, ed N sia il suo complemento; quindi, $\overline{x} = A_B^{-1} b_B$. Essa è ammissibile se soddisfa anche tutti i vincoli fuori base, cioè $A_N \overline{x} \leq b_N$, altrimenti viene detta non ammissibile; è non degenere se tutti i vincoli fuori base sono verificati come disuguaglianze strette, cioè se per ogni $i \in N$ si ha $A_i \overline{x} \neq b_i$, altrimenti viene detta degenere.

Una soluzione duale $\overline{y}$ è di base se è soluzione di un sistema del tipo $y_B A_B = c$, $y_N = 0$; quindi, $\overline{y}_B = c A_B^{-1}$ e $\overline{y}_N = 0$. Essa è ammissibile se tutte le componenti di $\overline{y}_B$ sono non negative, cioè $\overline{y}_B \geq 0$, altrimenti viene detta non ammissibile; è non degenere se tutte le componenti di $\overline{y}_B$ sono diverse da 0, altrimenti viene detta degenere.

Consideriamo la base $B = \{2, 3, 4\}$; la corrispondente matrice di base è

$$
A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},
$$

che è non singolare, essendo 1 il valore del suo determinante. La corrispondente soluzione di base primale si ottiene risolvendo il sistema

$$
A_B x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

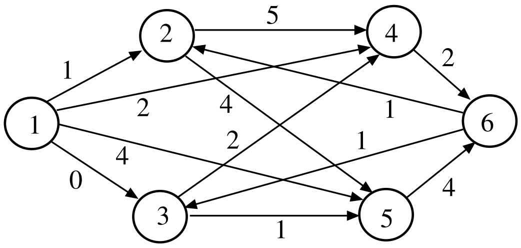
ed è $\overline{x} = [1, 1, 1]$. Questa soluzione è non ammissibile perché non soddisfa il primo vincolo; inoltre è degenere perché il quinto vincolo, fuori base, è soddisfatto come uguaglianza.

Consideriamo la stessa base per il problema duale; la corrispondente soluzione di base duale si ottiene risolvendo il sistema

$$
\begin{array}{l}
y_B A_B = [0, 0, 1] \\
y_N = 0
\end{array}
$$

ed è $\overline{y}_B = [\overline{y}_2, \overline{y}_3, \overline{y}_4] = [1, -1, 0]$, $\overline{y}_N = [\overline{y}_1, \overline{y}_5] = [0, 0]$, e quindi $\overline{y} = [0, 1, -1, 0, 0]$. Questa soluzione è non ammissibile perché $\overline{y}_3 = -1$; inoltre è degenere perché $\overline{y}_B$ ha una componente nulla.

3) Si risolva il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 2 per l'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo SPT.S. Per ogni iterazione si indichino l'insieme Q all'inizio dell'iterazione, il nodo u estratto da Q ed i valori delle etichette e dei predecessori dei nodi. Si fornisca alla fine l'albero trovato.



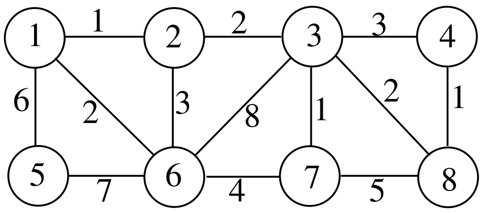
SVOLGIMENTO

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 5 \cdot 5 + 1 = 26$.

Iter.	Q	u	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$
0			26	0	26	26	26	26	2	nil	2	2	2	2
1	$\{2\}$	2	26	0	26	5	4	26	2	nil	2	2	2	2
2	$\{4,5\}$	5	26	0	26	5	4	8	2	nil	2	2	2	5
3	$\{4,6\}$	4	26	0	26	5	4	7	2	nil	2	2	2	4
4	$\{6\}$	6	26	0	8	5	4	7	2	nil	6	2	2	4
5	$\{3\}$	3	26	0	8	5	4	7	2	nil	6	2	2	4

L'albero trovato è composto dagli archi $(2,4)$, $(2,5)$, $(4,6)$ e $(6,3)$, più l'arco fittizio $(2,1)$ di costo 26. Ciò significa che 1 non è raggiungibile da 2 attraverso alcun cammino orientato.

4) Sia dato il grafo $G = (N, A)$ in figura. Applicare l'algoritmo di Kruskal per determinare l'albero di copertura di costo minimo. Fornire ad ogni iterazione l'arco in esame, indicando se esso viene o meno selezionato, l'insieme S degli archi selezionati e il suo costo. Al termine, fornire l'albero ottimo.
Si aggiungano quindi al grafo due nuovi archi $(2,5)$ e $(4,7)$ i cui costi sono $c_{25} = c_{47} = 4$. Partendo dall'albero ottenuto, determinare il nuovo albero ottimo motivando le operazioni che si effettuano.

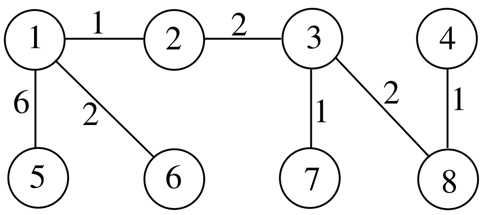


SVOLGIMENTO

Indichiamo con $c(S)$ il costo dell'insieme S, dato dalla somma dei costi degli archi appartenenti ad esso. Inizialmente si ha $S = \emptyset$ e $c(S) = 0$. Un possibile ordinamento dell'insieme degli archi, in ordine non decrescente dei costi, è $\{(1,2),(3,7),(4,8),(1,6),(2,3),(3,8),(2,6),(3,4),(6,7),(7,8),(1,5),(5,6),(3,6)\}$.

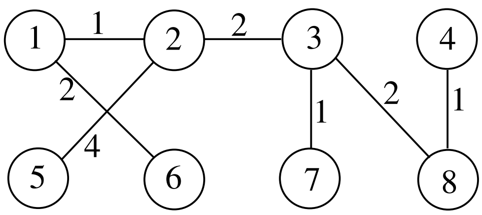
it.	(i,j)	selez?	S	$c(S)$
1	$(1,2)$	SI	$\{(1,2)\}$	1
2	$(3,7)$	SI	$\{(1,2),(3,7)\}$	2
3	$(4,8)$	SI	$\{(1,2),(3,7),(4,8)\}$	3
4	$(1,6)$	SI	$\{(1,2),(3,7),(4,8),(1,6)\}$	5
5	$(2,3)$	SI	$\{(1,2),(3,7),(4,8),(1,6),(2,3)\}$	7
6	$(3,8)$	SI	$\{(1,2),(3,7),(4,8),(1,6),(2,3),(3,8)\}$	9
7	$(2,6)$	NO	$\{(1,2),(3,7),(4,8),(1,6),(2,3),(3,8)\}$	9
8	$(3,4)$	NO	$\{(1,2),(3,7),(4,8),(1,6),(2,3),(3,8)\}$	9
9	$(6,7)$	NO	$\{(1,2),(3,7),(4,8),(1,6),(2,3),(3,8)\}$	9
10	$(7,8)$	NO	$\{(1,2),(3,7),(4,8),(1,6),(2,3),(3,8)\}$	9
11	$(1,5)$	SI	$\{(1,2),(3,7),(4,8),(1,6),(2,3),(3,8),(1,5)\}$	15

STOP in quanto $|S| = n - 1 = 7$. L'albero trovato è:



L'arco $(2,5)$ ha costo inferiore a quello dell'arco $(1,5)$: $c_{25} = 4 < 6 = c_{15}$. Rimuovendo da S l'arco $(1,5)$ si ottiene il taglio $(\{1,2,3,4,6,7,8\},\{5\})$ il cui arco di costo minimo è $(2,5)$; pertanto sostituiamo l'arco $(1,5)$ con $(2,5)$ ottenendo una diminuzione del costo dell'albero da 15 a 13.
L'arco $(4,7)$ invece non è l'arco di costo minimo relativo ai tagli che si ottengono rimuovendo da S uno degli archi $(3,7),(3,8)$ o $(4,8)$, tutti e tre di costo inferiore. Pertanto l'arco $(4,7)$ viene scartato.

Il nuovo albero ottimo, di costo 13, è quindi:



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

Si consideri la soluzione $\overline{x} = (3,3)$. Si verifichi che sia ammissibile; quindi, mediante il Teorema Forte della Dualità, si controlli se essa sia una soluzione ottima, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

Il problema duale è:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & -4y_1 & + & 4y_2 & + & 6y_3 & + & 4y_4 & & \\ & -y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\ & -y_1 & & & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

$\overline{x}$ è ammissibile in quanto $A\overline{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = b.$

L'insieme degli indici dei vincoli attivi è $I = I(\overline{x}) = \{3\}$. Possiamo pertanto porre $\overline{y}_1 = \overline{y}_2 = \overline{y}_4 = 0$. Scriviamo i sistemi ridotti (PR) $\{A_I\xi \leq 0, c\xi > 0\}$ e (DR) $\{y_I A_I = c, y_I \geq 0\}$:

$$(PR): \begin{cases} \xi_1 & +\xi_2 & \leq 0 \\ \xi_1 & +\xi_2 & > 0 \end{cases} \qquad (DR): \begin{cases} y_3 & = 1 \\ y_3 & = 1 \\ y_3 & \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema (DR) ha soluzione $\overline{y}_3 = 1$.
Pertanto, per il Teorema Forte della Dualità, $\overline{x}$ è una soluzione ottima di valore $c\overline{x} = 6$. Una soluzione ottima del duale è $\overline{y} = (0,0,1,0)$, di valore $\overline{y}b = 6 = c\overline{x}$.

6) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & & & & \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1)

$B_1 = \{2, 4\}$, $A_{B_1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $x^1 = A_{B_1}^{-1} b_{B_1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$y_{B_1}^1 = cA_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad y_{N_1}^1 = 0, \quad y^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix},$$

$$h_1 = \min\{i \in B_1 : y_i^1 < 0\} = \min\{2, 4\} = 2 \text{ [regola anticiclo di Bland]}, \; B_1(h_1) = 1,$$

$$\xi^1 = -A_{B_1}^{-1} u_{B_1(h_1)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad A_{N_1}\xi^1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

$J_1 = \{i \in N_1 : A_i\xi^1 > 0\} = \{1, 3\}$, $\lambda_i = (b_i - A_i x^1)/A_i\xi^1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\overline{\lambda} = \min\{\lambda_1, \lambda_3\} = 0$ [cambio di base degenere], $k_1 = \min\{i \in J_1 : \lambda_i = \overline{\lambda}\} = \min\{1, 3\} = 1$ [regola anticiclo di Bland].

it.2) $B_2 = \{1, 4\}$, $A_{B_2} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $x^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = x^1$,

$$y_{B_2}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad y_{N_2}^2 = 0, \quad y^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad h_2 = 4, \quad B_2(h_2) = 2,$$

$\xi^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A_{N_2}\xi^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $J_2 = \{3\}$, $\overline{\lambda} = \lambda_3 = 0$ [cambio di base degenere], $k_2 = 3$.

it.3) $B_3 = \{1, 3\}$, $A_{B_3} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_{B_3}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $x^3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = x^2 = x^1$,

$$y_{B_3}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad y_{N_3}^3 = 0, \quad y^3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad h_3 = 1, \quad B_3(h_3) = 1,$$

$$\xi^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_{N_3}\xi^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Poiché $A_{N_3}\xi^3 \leq 0$, il problema è superiormente illimitato ed il suo duale è vuoto.