RICERCA OPERATIVA (a.a. 2003/04)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: I SI M **Matricola** Corso A B C

1) La cooperativa di Taxi "La Puntuale" è in difficoltà a mantenere il proprio proverbiale livello di affidabilità. Ha preso gli impegni della tabella, dove sono indicate per ogni corsa il tempo in cui bisogna essere dal cliente e la durata del servizio richiesto, ma una improvvisa recrudescenza di influenza ha ridotto a 3 il numero di autisti disponibili. Il responsabile delle operazioni vuole allora determinare il numero minimo di autisti necessari per rispettare gli impegni presi, e poiché dispone di un software di Programmazione Lineare Intera, vuole formulare il problema come problema di PLI. Scrivere il problema come problema di PLI.

Corse	1	2	3	4	5
Tempo inizio	9,00	9,30	10,30	13,20	15,00
Durata	2,00	1,30	1,00	2,20	1,30

SVOLGIMENTO

Considerando le corse come lavori e gli autisti come macchine, questo problema è un problema di ordinamento di lavori su macchine con minimizzazione del numero delle macchine. In questo caso abbiamo 5 lavori e 3 macchine.

Innanzitutto introduciamo la variabile binaria x_{ij} (con $i = 1, \ldots, 5$ e $j = 1, 2, 3$) che avrà valore 1 se il servizio i è affidato all'autista j, e 0 altrimenti. Possiamo allora scrivere i vincoli di semiassegnamento che impongono che ciascun servizio venga assegnato ad uno ed un solo autista ($\sum_{j=1,2,3} x_{ij} = 1, \ i = 1, \ldots, 5$):

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 1 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} &= 1 \\
x_{51} + x_{52} + x_{53} &= 1
\end{aligned}$$

Bisogna poi definire gli insiemi $S(i)$ dei servizi $h > i$ che hanno sovrapposizioni col servizio i, per $i = 1, \ldots, 4$, e che quindi sono con esso incompatibili: $S(1) = \{2, 3\}$, $S(2) = \{3\}$, $S(3) = \emptyset$, $S(4) = \{5\}$. Possiamo allora scrivere i vincoli di incompatibilità ($x_{ij} + x_{hj} \leq 1, \ i = 1, \ldots, 5, \ h \in S(i)\ , j = 1, 2, 3$):

$$\begin{array}{llll}
x_{11} + x_{21} \leq 1; & x_{11} + x_{31} \leq 1; & x_{21} + x_{31} \leq 1; & x_{41} + x_{51} \leq 1; \\
x_{12} + x_{22} \leq 1; & x_{12} + x_{32} \leq 1; & x_{22} + x_{32} \leq 1; & x_{42} + x_{52} \leq 1; \\
x_{13} + x_{23} \leq 1; & x_{13} + x_{33} \leq 1; & x_{23} + x_{33} \leq 1; & x_{43} + x_{53} \leq 1.
\end{array}$$

Indicando poi con y_j, per $j = 1, 2, 3$, una variabile che vale 1 se l'autista j è utilizzato e 0 altrimenti, possiamo scrivere i vincoli logici che ci dicono che, se un servizio viene assegnato ad un autista, allora quell'autista dovrà essere utilizzato ($y_j \geq x_{ij}, \ i = 1, \ldots, 5, \ j = 1, 2, 3$):

$$\begin{array}{lllll}
y_1 \geq x_{11}, & y_1 \geq x_{21}, & y_1 \geq x_{31}, & y_1 \geq x_{41}, & y_1 \geq x_{51}, \\
y_2 \geq x_{12}, & y_2 \geq x_{22}, & y_2 \geq x_{32}, & y_2 \geq x_{42}, & y_2 \geq x_{52}, \\
y_3 \geq x_{13}, & y_3 \geq x_{23}, & y_3 \geq x_{33}, & y_3 \geq x_{43}, & y_3 \geq x_{53}.
\end{array}$$

In alternativa si possono utilizzare i seguenti vincoli aggregati:

$$5y_j \geq \sum_{i=1,\ldots,5} x_{ij} \qquad j = 1, 2, 3\ .$$

Bisogna poi aggiungere i vincoli sulle variabili binarie:

$$\begin{array}{lll}
x_{ij} \in \{0, 1\}, & i = 1, \ldots, 5, & j = 1, 2, 3; \\
y_j \in \{0, 1\}, & & j = 1, 2, 3.
\end{array}$$

Il problema è allora quello di minimizzare la funzione

$$y_1 + y_2 + y_3,$$

che fornisce il numero di autisti utilizzati, con tutti i vincoli scritti sopra.

2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

Si consideri la soluzione $\overline{x} = (3, 3)$. Si verifichi che sia ammissibile; quindi, mediante il Teorema Forte della Dualità, si controlli se essa sia una soluzione ottima, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

Il problema duale è:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & -4y_1 & + & 4y_2 & + & 6y_3 & + & 4y_4 & & \\ & -y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\ & -y_1 & & & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

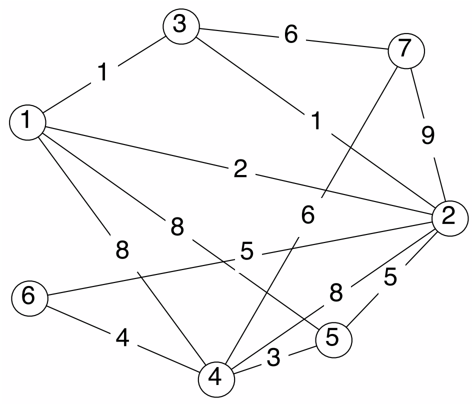
$\overline{x}$ è ammissibile in quanto $A\overline{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = b.$

L'insieme degli indici dei vincoli attivi è $I = I(\overline{x}) = \{3\}$. Possiamo pertanto porre $\overline{y}_1 = \overline{y}_2 = \overline{y}_4 = 0$. Scriviamo i sistemi ridotti (PR) $\{A_I\xi \leq 0, c\xi > 0\}$ e (DR) $\{y_I A_I = c, y_I \geq 0\}$:

$$(PR): \quad \left\{ \begin{array}{lll} \xi_1 & +\xi_2 & \leq 0 \\ \xi_1 & +\xi_2 & > 0 \end{array} \right. \qquad\qquad (DR): \quad \left\{ \begin{array}{ll} y_3 & = 1 \\ y_3 & = 1 \\ y_3 & \geq 0 \end{array} \right.$$

Il sistema (DR) ha soluzione $\overline{y}_3 = 1$.
Pertanto, per il Teorema Forte della Dualità, $\overline{x}$ è una soluzione ottima di valore $c\overline{x} = 6$. Una soluzione ottima del duale è $\overline{y} = (0, 0, 1, 0)$, di valore $\overline{y}b = 6 = c\overline{x}$.

3) Si consideri il grafo di figura in cui sugli archi sono indicati i costi. Determinare l'albero di copertura ottimo, utilizzando l'algoritmo $Greedy - MST$. Si fornisca la sequenza delle operazioni di inserzione effettuate, cioè il taglio (N', N'') e l'arco (u, v) selezionati. Verificare se l'albero ottimo trovato è unico, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

Applichiamo l'algoritmo di Kruskal che è una implementazione dell'algoritmo $Greedy - MST$. In questo algoritmo gli archi vengono esaminati in ordine non decrescente dei costi e viene effettuata l'operazione di inserzione ogni volta che l'arco (u, v) esaminato può essere considerato appartenente ad un taglio (N', N'') tale che nessun arco di $A(N', N'')$ è stato inserito in uno dei passi precedenti.

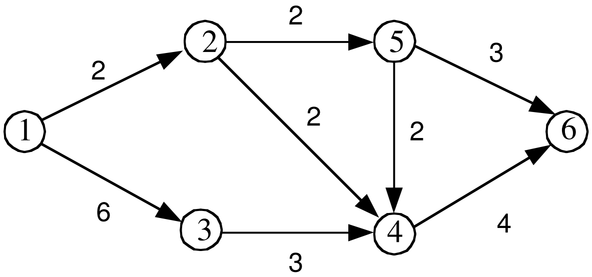
Le iterazioni effettuate dall'algoritmo sono:

1. Si inserisce l'arco (1,3) che è l'arco di costo minimo nel taglio ({1}, {2,3,4,5,6,7}).
2. Si inserisce l'arco (2,3) che è l'arco di costo minimo nel taglio ({1,3}, {2,4,5,6,7}).
3. Si esamina l'arco (1,2) che viene scartato perché forma un ciclo con (1,3) ed (2,3).
4. Si inserisce l'arco (4,5) che è l'arco di costo minimo nel taglio ({4}, {1,2,3,5,6,7}).
5. Si inserisce l'arco (4,6) che è l'arco di costo minimo nel taglio ({4,5}, {1,2,3,6,7}).
6. Si inserisce l'arco (2,5) che è un arco di costo minimo nel taglio ({4,5,6}, {1,2,3,7}).
7. Si esamina l'arco (2,6) che viene scartato perché forma ciclo con (2,5), (4,5) e (4,6).
8. Si inserisce l'arco (3,7) che è un arco di costo minimo nel taglio ({7}, {1,2,3,4,5,6}).

Essendo stati inseriti già 6 ($= n - 1$) archi, l'algoritmo termina.

La soluzione non è unica. Infatti al passo 6 avremmo potuto inserire $(2, 6)$ invece di $(2, 5)$, poiché entrambi hanno costo 5; in questo caso al passo successivo avremmo scartato $(2, 5)$ invece di $(2, 6)$. Inoltre al passo 8 avremmo potuto inserire $(4, 7)$ invece di $(3, 7)$. Avendo avuto in due successive iterazioni due possibilità fra cui scegliere, si hanno 4 soluzioni ottime alternative.

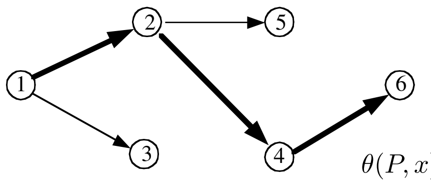
4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Durante la ricerca di un cammino aumentante, si visitino gli archi della stella uscente del nodo correntemente esaminato secondo l'ordine crescente dei rispettivi nodi testa (ad es., (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.



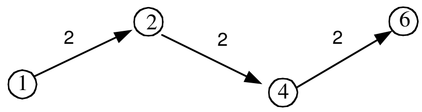
SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

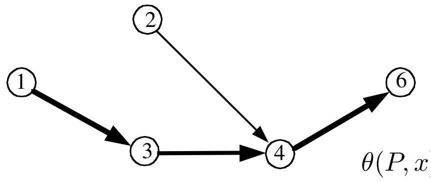
Iterazione 1: ($x = 0$, $v = 0$)



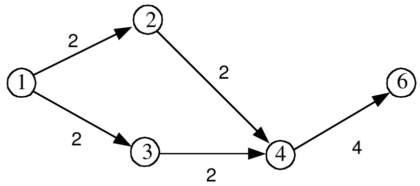
$\theta(P, x) = 2$, $v = 2$



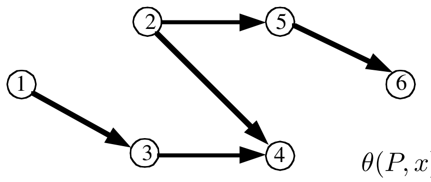
Iterazione 2:



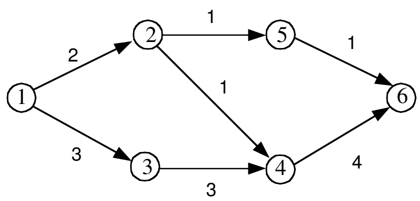
$\theta(P, x) = 2$, $v = 4$



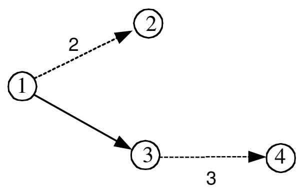
Iterazione 3:



$\theta(P, x) = 1$, $v = 5$



Iterazione 4:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente x è massimo: $N_s = \{1, 3\}$, $N_t = \{2, 4, 5, 6\}$, $u(N_s, N_t) = 2 + 3 = 5 = v$.

5) Si consideri il seguente problema di P.L. su Coni:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 4x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & -3x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -4x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Si dimostri che il problema ha ottimo illimitato applicando l'algoritmo del Simplesso su Coni, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la soluzione di base duale, l'indice entrante, la direzione di crescita determinata e l'indice uscente, giustificando le risposte. Al termine si verifichi, sempre per via algebrica, se la direzione ammissibile di crescita restituita dall'algoritmo resti ancora ammissibile e/o di crescita nel caso in cui il vettore dei costi c fosse modificato in $c' = (1, -4)$.

SVOLGIMENTO

$$\text{it.1) } B_1 = \{1,2\}, \quad A_{B_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$y^1_{B_1} = cA^{-1}_{B_1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \end{bmatrix}, \quad y^1_{N_1} = 0, \quad y^1 = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B_1 \ : \ y_i < 0\} = 1, \quad B_1(h) = 1,$$

$$\xi^1 = -A^{-1}_{B_1} u_{B_1(h)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad A_{N_1}\xi^1 = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{i \in N_1 : \ A_i \xi^1 > 0\} = 4.$$

$$\text{it.2) } B_2 = \{2,4\}, \quad A_{B_2} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1}_{B_2} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -3/4 \end{bmatrix},$$

$$y^2_{B_2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 & 7/4 \end{bmatrix}, \quad y^2_{N_2} = 0, \quad y^2 = \begin{bmatrix} 0 & -3/4 & 0 & 7/4 \end{bmatrix},$$

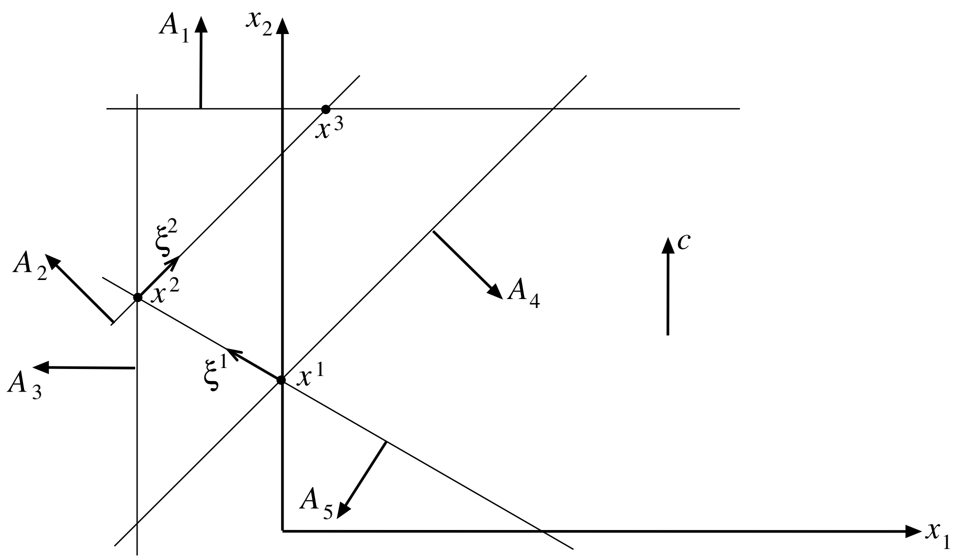
$$h = 2, \quad B_2(h) = 1,$$

$$\xi^2 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}, \quad A_{N_2}\xi^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -5/4 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP}$$

$A_{N_2}\xi^2 \leq 0$ implica che ξ^2 è una direzione ammissibile di crescita. (P) ha quindi ottimo illimitato, mentre il duale è vuoto.

Supponiamo che il vettore dei costi c venga modificato in $c' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix}$. È immediato osservare che, in tal caso, ξ^2 resterebbe una direzione ammissibile per (P), non avendo modificato la sua regione ammissibile. Essendo $c'\xi^2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} = -3/4 < 0$, ξ^2 non è una direzione di crescita per il problema modificato.

6) Si risolva geometricamente per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale il problema di P.L. in figura, partendo dalla base $B = \{4, 5\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, il segno delle variabili duali in base e gli indici uscente ed entrante, e si riportino sulla figura la soluzione primale e la direzione di spostamento. Indicare poi, se ce ne sono, quali fra le basi trovate sono primali e/o duali degeneri. Fornire infine tutte le basi ottime.



SVOLGIMENTO

it.1) $B_1 = \{4, 5\}$, $y_4^1 < 0$, $y_5^1 < 0$, $h_1 = \min\{4, 5\} = 4$ (regola anticiclo di Bland), $k_1 = \min\{2, 3\} = 2$ (regola anticiclo di Bland).

it.2) $B_2 = \{2, 5\}$, $y_2^2 > 0$, $y_5^2 < 0$, $h_2 = 5$, $k_2 = 1$.

it.3) $B_3 = \{1, 2\}$, $y_1^3 > 0$, $y_2^3 = 0$, STOP.

x^3 in figura è la soluzione primale ottima mentre la soluzione duale ottima è $y^3 = [y_1^3\ 0\ 0\ 0\ 0]$, che risulta quindi degenere.

La base $B_2 = \{2, 5\}$ è primale degenere, infatti anche il terzo vincolo è attivo. La base $B_3 = \{1, 2\}$ è duale degenere, infatti si ha $y_2^3 = 0$.

Oltre alla base $B_3 = \{1, 2\}$, anche la base $B_4 = \{1, 4\}$ è ottima.