RICERCA OPERATIVA (a.a. 2003/04)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{M}}$ **Matricola** Corso $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$

1) Si consideri una città costituita da n quartieri, ognuno dei quali è abitato da a_i persone, $i = 1, \dots, n$. L'amministratore sanitario di tale città vuole organizzare m presidi sanitari ed assegnare ad essi gli n quartieri (l'assegnamento di un quartiere ad un presidio comporta l'assegnamento a tale presidio di tutti gli abitanti del quartiere stesso).

Per motivi di equilibrio, si vuole che il rapporto tra il minimo ed il massimo numero di abitanti assegnati ad un presidio sia maggiore o uguale ad 1/2.

Noto il costo c_{ij} derivante dall'assegnamento del quartiere i (e, quindi, di tutti i suoi abitanti) al presidio j, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere come assegnare i quartieri ai presidi rispettando il vincolo di equilibrio e minimizzando il costo totale di assegnamento.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti nm variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il quartiere } i \text{ è assegnato al presidio } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

I vincoli di semiassegnamento che garantiscono che ogni quartiere sia assegnato ad uno ed uno solo presidio sono:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Introduciamo inoltre due variabili ausiliarie, w e z, che utilizzeremo per stimare, rispettivamente per difetto e per eccesso, il minimo numero ed il massimo numero di abitanti assegnati ad un presidio. Tali variabili ausiliarie devono rispettare i seguenti vincoli:

$$w \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} \leq z, \qquad j = 1, \dots, m.$$

Il vincolo di equilibrio è allora esprimibile mediante:

$$w \geq z/2.$$

La funzione obiettivo, da minimizzare, è data dal costo totale di assegnamento: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$.

La formulazione del problema è quindi

$$\begin{array}{rrcll}
\min & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} & & & \\
 & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} & = & 1 & i = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} - w & \geq & 0 & j = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} - z & \leq & 0 & j = 1, \dots, m \\
 & 2w - z & \geq & 0 & \\
 & x_{ij} & \in & \{0, 1\} & i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m
\end{array}$$

2) Si consideri la seguente funzione concava $f(x)$ che si intende minimizzare:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0, \\ 500 + 3x, & \text{se } 0 < x \leq 100. \end{cases}$$

Si fornisca una formulazione analitica lineare della funzione e se ne discuta la validità per tutti i valori dell'intervallo $[0, 100]$.

SVOLGIMENTO

Per rappresentare analiticamente $f(x)$ nell'intervallo $[0, 100]$ introduciamo la variabile decisionale y che assume il valore $y = 0$ se $f(x) = 0$, e il valore $y = 1$ se $f(x) = 500 + 3x$. Si ottiene pertanto la seguente funzione $g(x, y)$, lineare nelle variabili x e y:

$$g(x, y) = 500y + 3x.$$

Essa ha validità se sono verificati i seguenti vincoli:

$$0 \leq x \leq 100y;$$

$$y \in \{0, 1\};$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

Infatti, quando $y = 0$ si ha $x = 0$ e quindi $g(0, 0) = f(0) = 0$, mentre quando $y = 1$ si ha $g(x, 1) = 500 + 3x$, ed essa è definita per l'intero intervallo chiuso $[0, 100]$.

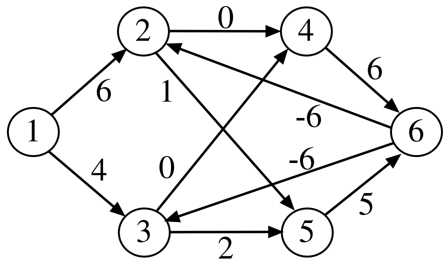
Si noti che, per $x = 0$ si hanno due diversi valori di $g(x, y)$:

$$g(0, 0) = f(0) = 0;$$

$$g(0, 1) = 500 + 3 \cdot 0 = 500 \neq f(0).$$

Il secondo valore $g(0, 1) = 500$ non ha relazione con la funzione $f(x)$; tuttavia, poiché si vuole minimizzare $f(x)$, nella minimizzazione di $g(x, y)$ la soluzione $(x, y) = (0, 1)$ viene esclusa in quanto $g(0, 0) < g(0, 1)$.

3) Si consideri il grafo di figura in cui sugli archi sono indicati i costi. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice $r = 1$ utilizzando l'algoritmo con la migliore complessità computazionale, motivando la scelta. Fornire ad ogni iterazione, l'insieme Q all'inizio dell'iterazione, il nodo u selezionato da Q, l'albero corrente e le relative etichette. Al termine disegnare l'albero ottimo.



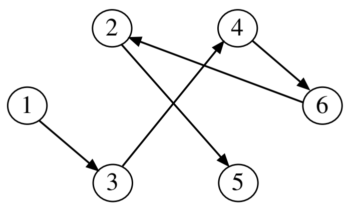
SVOLGIMENTO

Siccome nel grafo ci sono archi con costo negativo, utilizziamo l'algoritmo a selezione su lista SPT.L, in cui l'insieme Q è implementato come una fila, che ha complessità $O(mn)$, la migliore per grafi non aciclici con archi aventi costo negativo.

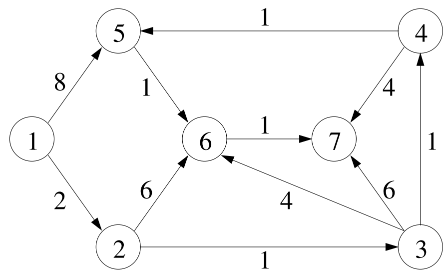
Sia $M = (n-1)c_{max} + 1 = 5 \times 6 + 1 = 31$.

Iter.	Q	u	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$
0	$\{1\}$		0	31	31	31	31	31	nil	1	1	1	1	1
1	$\{1\}$	1	0	6	4	31	31	31	nil	1	1	1	1	1
2	$\{2,3\}$	2	0	6	4	6	7	31	nil	1	1	2	2	1
3	$\{3,4,5\}$	3	0	6	4	4	6	31	nil	1	1	3	3	1
4	$\{4,5\}$	4	0	6	4	4	6	10	nil	1	1	3	3	4
5	$\{5.6\}$	5	0	6	4	4	6	10	nil	1	1	3	3	4
6	$\{6\}$	6	0	4	4	4	6	10	nil	6	1	3	3	4
7	$\{2\}$	2	0	4	4	4	5	10	nil	6	1	3	2	4
8	$\{5\}$	5	0	4	4	4	5	10	nil	6	1	3	2	4
9	$\emptyset$													

L'albero dei cammini minimi individuato è:



4) Si verifichi se il grafo in figura è aciclico, giustificando la risposta. Si determini poi un albero dei cammini minimi di radice $r = 1$, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e motivando la scelta effettuata. Per ciascuna iterazione si forniscano il nodo i di cui si esplora $FS(i)$, i vettori delle etichette e dei predecessori. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



SVOLGIMENTO

Senza bisogno di rinumerazione dei nodi, per ogni arco (i, j) del grafo in figura risulta $i < j$; pertanto il grafo è aciclico. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista computazionale risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$.

Sia $M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 8 + 1 = 49$.

Iter.	i	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[7]$
0		0	49	49	49	49	49	49	nil	1	1	1	1	1	1
1	1	0	2	49	49	8	49	49	nil	1	1	1	1	1	1
2	2	0	2	3	49	8	8	49	nil	1	2	1	1	2	1
3	3	0	2	3	4	8	7	9	nil	1	2	3	1	3	3
4	4	0	2	3	4	5	7	8	nil	1	2	3	4	3	4
5	5	0	2	3	4	5	6	8	nil	1	2	3	4	5	4
6	6	0	2	3	4	5	6	7	nil	1	2	3	4	5	6

Albero dei cammini minimi individuato: