RICERCA OPERATIVA (a.a. 2003/04)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{M}}$ **Matricola** Corso $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$

1) Su una rete telefonica, rappresentata da un grafo orientato $G = (N, A)$, devono essere inviati due tipi di pacchetti, v e d: il nodo s_1 deve inviare p_1 pacchetti di tipo v al nodo t_1, mentre il nodo s_2 deve inviare p_2 pacchetti di tipo d al nodo t_2. Il costo unitario di trasmissione lungo un arco (i, j) è c^v_{ij} nel caso di trasmissione di un pacchetto di tipo v, e c^d_{ij} nel caso di trasmissione di un pacchetto di tipo d.

Sapendo che ogni arco (i, j) può trasmettere al più u^v_{ij} pacchetti di tipo v e al più u^d_{ij} pacchetti di tipo d, e che comunque non può trasmettere più di u_{ij} pacchetti complessivamente (sia di tipo v che d), si formuli in termini di P.L.I. il problema di inviare i pacchetti da s_1 a t_1 e da s_2 a t_2 in modo da rispettare i vincoli di capacità e minimizzare il costo di trasmissione.

SVOLGIMENTO

Osserviamo che sulla rete G devono essere inviati due flussi, uno relativo ai pacchetti di tipo v da s_1 a t_1, ed uno relativo ai pacchetti di tipo d da s_2 a t_2. Introduciamo quindi le seguenti variabili di flusso:

$$x^v_{ij} \in \mathbb{Z}_+ : \text{numero di pacchetti di tipo } v \text{ inviati lungo } (i,j), \forall (i,j) \in A,$$

$$x^d_{ij} \in \mathbb{Z}_+ : \text{numero di pacchetti di tipo } d \text{ inviati lungo } (i,j), \forall (i,j) \in A.$$

I flussi x^v e x^d devono soddisfare i vincoli di conservazione e di capacità:

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x^v_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x^v_{ij} = b^v_i, i \in N$$

$$0 \le x^v_{ij} \le u^v_{ij}, (i,j) \in A,$$

dove $b^v_{s_1} = -p_1$, $b^v_{t_1} = p_1$, e $b^v_i = 0$ per ogni altro nodo;

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x^d_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x^d_{ij} = b^d_i, i \in N$$

$$0 \le x^d_{ij} \le u^d_{ij}, (i,j) \in A.$$

dove $b^d_{s_2} = -p_2$, $b^d_{t_2} = p_2$, e $b^d_i = 0$ per ogni altro nodo.
Inoltre, devono essere rispettati i seguenti vincoli di capacità globale:

$$x^v_{ij} + x^d_{ij} \le u_{ij}, (i,j) \in A.$$

La funzione obiettivo, da minimizzare, è data dal costo totale di trasmissione: $\sum_{(i,j)\in A} c^v_{ij}x^v_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} c^d_{ij}x^d_{ij}$.

La formulazione del problema è quindi

$$\begin{array}{lrl}
\min & & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} c^v_{ij}x^v_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} c^d_{ij}x^d_{ij} \\
& \displaystyle\sum_{(j,i)\in BS(i)} x^v_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x^v_{ij} = b^v_i & i \in N \\
& \displaystyle\sum_{(j,i)\in BS(i)} x^d_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x^d_{ij} = b^d_i & i \in N \\
& 0 \le x^v_{ij} \le u^v_{ij} & (i,j) \in A, \\
& 0 \le x^d_{ij} \le u^d_{ij} & (i,j) \in A, \\
& x^v_{ij} + x^d_{ij} \le u_{ij} & (i,j) \in A, \\
& x^v_{ij}, x^d_{ij} \in \mathbb{Z}_+ & (i,j) \in A.
\end{array}$$

2) Si consideri la seguente formula logica: $e = (a \wedge d) \vee (b \wedge c)$.

Si verifichi se la formulazione analitica sotto riportata soddisfa le specifiche di una formulazione di P.L.I., giustificando la risposta. In caso negativo si modifichi opportunamente la formulazione, trasformandola in una formulazione di P.L.I.

$$v = x(a) * x(d), \quad w = x(b) * x(c)$$

$$x(e) \geq v, \quad x(e) \geq w, \quad x(e) \leq v + w$$

$$x(a), x(b), x(c), x(d), x(e), v, w \in \{0, 1\}$$

SVOLGIMENTO

I vincoli $v = x(a) * x(d)$ e $w = x(b) * x(c)$ sono non lineari e quindi non utilizzabili all'interno di una formulazione di P.L.I. Per ottenere una tale formulazione, basta sostituire il primo con i vincoli lineari che caratterizzano l'operatore logico AND

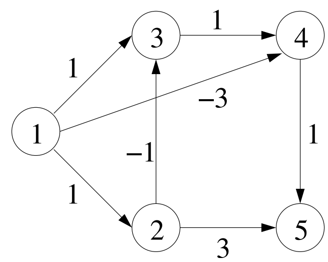
$$v \leq x(a), \quad v \leq x(d), \quad v \geq x(a) + x(d) - 1$$

il secondo con gli analoghi vincoli lineari

$$w \leq x(b), \quad w \leq x(c), \quad w \geq x(b) + x(c) - 1$$

e lasciare gli altri inalterati.

3) Si verifichi se il grafo in figura è aciclico, giustificando la risposta. Si determini poi un albero dei cammini minimi di radice $r = 1$, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e motivando la scelta effettuata. Per ciascuna iterazione si forniscano il nodo i selezionato, i vettori delle etichette e dei predecessori. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



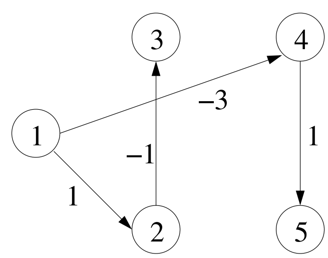
SVOLGIMENTO

Per ogni arco (i, j) del grafo in figura risulta $i < j$; segue che il grafo è aciclico. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista computazionale risulta essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$.

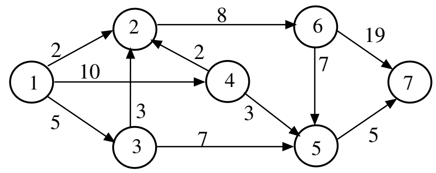
Sia $M = (n - 1)c_{max} + 1 = 4 \times 3 + 1 = 13$.

Iter.	i	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$
		0	13	13	13	13	nil	1	1	1	1
1	1	0	1	1	-3	13	nil	1	1	1	1
2	2	0	1	0	-3	4	nil	1	2	1	2
3	3	0	1	0	-3	4	nil	1	2	1	2
4	4	0	1	0	-3	-2	nil	1	2	1	4

Albero dei cammini minimi individuato:

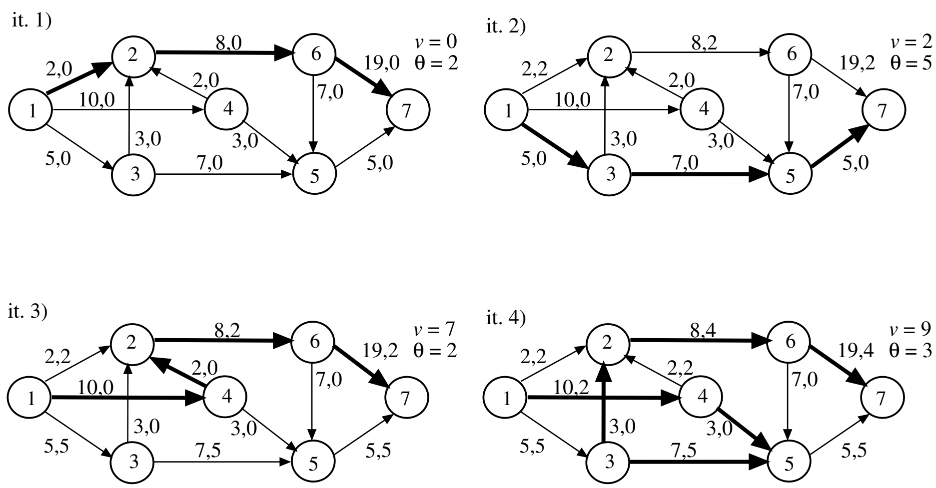


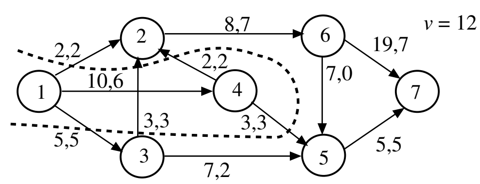
4) Si risolva il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 relativamente all'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Ad ogni iterazione indicare il flusso x, il suo valore v, il cammino aumentante utilizzato e la sua capacità θ. Al termine indicare il taglio di capacità minima determinato dall'algoritmo.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono mostrate in figura, dall'alto in basso e da sinistra a destra. Il secondo numero sugli archi indica il flusso lungo l'arco. Gli archi evidenziati indicano il cammino aumentante selezionato. Nell'ultima figura in basso a destra è mostrata la soluzione ottima: la linea tratteggiata indica il taglio di capacità minima; infatti la sua capacità è pari al valore $v = 12$ del flusso, individuato dall'algoritmo.





5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrl} \max & -4x_1 & + & x_2 & \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq 7 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq -1 \\ & x_1 & & & \leq 3 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq 5 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\overline{x} = (2,3)$ è ottima per il problema. In caso affermativo, si individui l'insieme delle soluzioni duali ammissibili complementari a $\overline{x}$. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \begin{array}{c} \max \ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min \ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\overline{x}$ e $\overline{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\overline{y}(b - A\overline{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\overline{x}$ e $\overline{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\overline{y}_i(b_i - A_i\overline{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

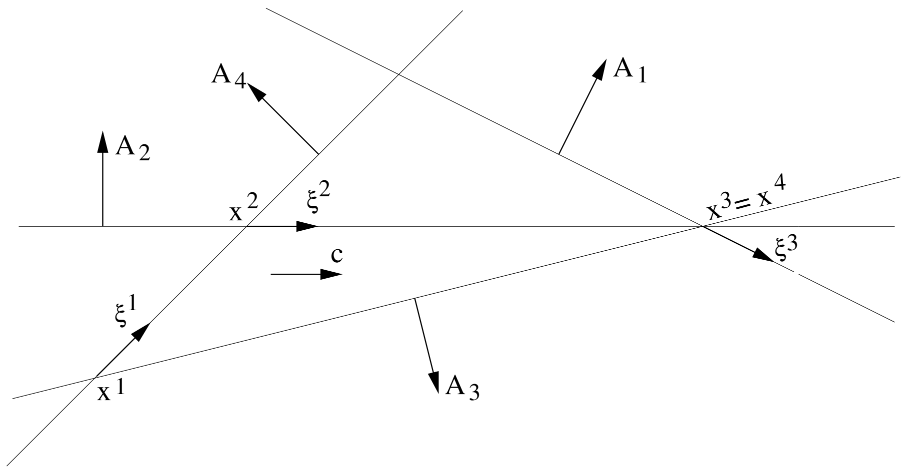
$$(P) \quad \begin{array}{rrcrl} \max & -4x_1 & + & x_2 & \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq 7 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq -1 \\ & x_1 & & & \leq 3 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq 5 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrl} \min & 7y_1 & - & y_2 & + & 3y_3 & + & 5y_4 & \\ & 2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & = -4 \\ & y_1 & - & y_2 & & & - & y_4 & = 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq 0. \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\overline{x} = (2,3)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\overline{x}$ è $I(\overline{x}) = \{i \in \{1, \dots, m\} : b_i - A_i\overline{x} = 0\} = \{1, 2\}$. Segue che una soluzione duale $\overline{y}$, tale che $\overline{y}A = c$, che formi con $\overline{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\overline{y}_3 = \overline{y}_4 = 0$. Affinché $\overline{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} 2y_1 & + & y_2 & = -4 \\ y_1 & - & y_2 & = 1 \\ y_1, & & y_2 & \geq 0 \end{array} \right.$$

Tale sistema ammette come unica soluzione $(-1, -2)$. Poiché tale soluzione ha componenti negative, essa non risulta ammissibile per (D). Poiché la sola soluzione complementare a $\overline{x}$ non è ammissibile per (D), segue che $\overline{x}$ non è una soluzione ottima per (P).

6) Si risolva geometricamente per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale il problema di P.L. in figura, partendo dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, il segno delle variabili duali in base e gli indici uscente ed entrante, e si riportino sulla figura la soluzione primale e la direzione di spostamento, giustificando le risposte.



SVOLGIMENTO

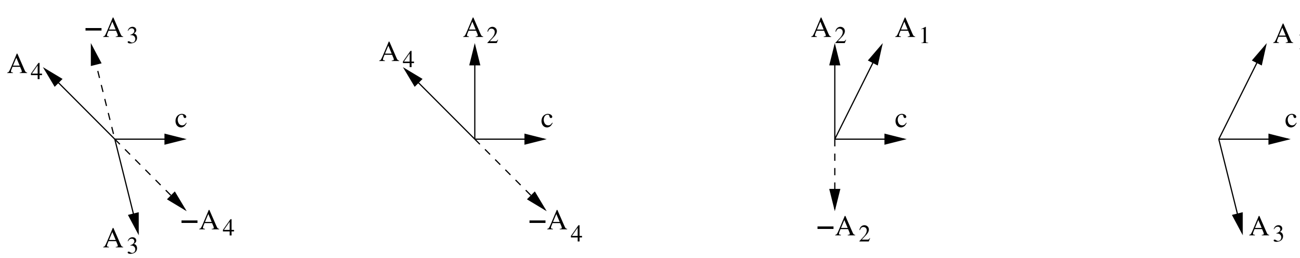
it. 1) $B = \{3, 4\}$, $y_3 < 0$, $y_4 < 0$ (in quanto c appartiene al cono finitamente generato da $-A_3$ e $-A_4$, come mostrato in figura (a)), $h = \min\{3, 4\} = 3$ (regola anticiclo di Bland), $k = 2$

it. 2) $B = \{2, 4\}$, $y_2 > 0$, $y_4 < 0$ (in quanto c appartiene al cono finitamente generato da A_2 e $-A_4$, come mostrato in figura (b)), $h = 4$, $k = \min\{1, 3\} = 1$ (regola anticiclo di Bland)

it. 3) $B = \{2, 1\}$, $y_2 < 0$, $y_1 > 0$ (in quanto c appartiene al cono finitamente generato da $-A_2$ e A_1, come mostrato in figura (c)), $h = 2$, $k = 3$.

it. 4) $B = \{3, 1\}$, $y_3 > 0$, $y_1 > 0$ (in quanto c appartiene al cono finitamente generato da A_3 e A_1, come mostrato in figura (d)), STOP.

La soluzione primale x^4 in figura è ottima.



(a) (b) (c) (d)