RICERCA OPERATIVA (a.a. 2003/04)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{M}}$ **Matricola** Corso $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$

1) La segretaria di un'importante impresa deve sbrigare 10 pratiche. Conosce il tempo t_i che le è necessario per sbrigare la pratica i, $i = 1, ..., 10$. Decide di sbrigare alcune pratiche al mattino, e di rimandare le altre al pomeriggio. Per ottimizzare il proprio carico di lavoro, decide di ripartire le pratiche in modo da minimizzare il massimo tra il tempo dedicato alle pratiche al mattino e quello loro dedicato al pomeriggio.

Si formuli il problema della segretaria in termini di P.L.I.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema, introduciamo 10 variabili logiche:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se la pratica } i \text{ è eseguita al mattino,} \\ 0, & \text{altrimenti (è eseguita al pomeriggio),} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, 10.$$

Per formulare la funzione obiettivo (da minimizzare) utilizziamo dei vincoli di soglia, introducendo una variabile ausiliaria T che rappresenta un'approssimazione per eccesso del tempo di lavoro mattutino e pomeridiano:

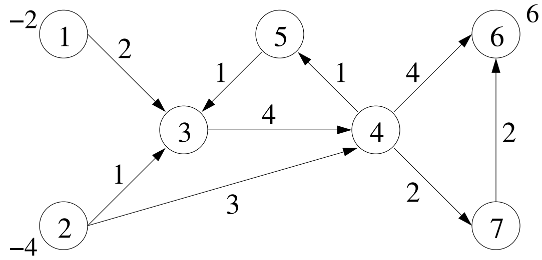
$$\sum_{i=1}^{10} t_i x_i \leq T,$$

$$\sum_{i=1}^{10} t_i (1 - x_i) \leq T.$$

La formulazione risultante del problema è:

$$\begin{array}{ll} \min & T \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{10} t_i x_i \leq T \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{10} t_i (1 - x_i) \leq T \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, 10 \end{array}$$

2) Dato il flusso x in figura, avente 1 e 2 come nodi origine, e 6 come nodo destinazione, si mostri che x può essere ottenuto inviando una quantità di flusso positiva su un insieme di cammini e di cicli orientati del grafo. Si elenchino i cammini ed i cicli utilizzati, specificando la quantità di flusso inviata su ognuno di essi. Giustificare la risposta.



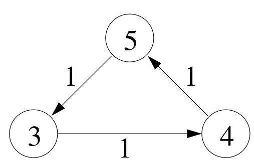
SVOLGIMENTO

Per ottenere x, inviamo le quantità di flusso sotto riportate sui seguenti cammini orientati:

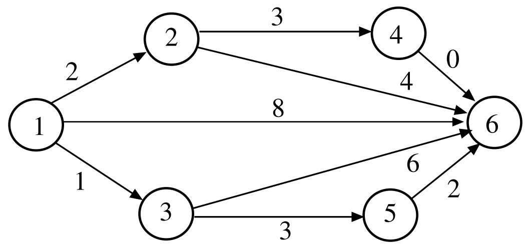
- $P_1 = (1, 3, 4, 6)$, $\theta(P_1) = 2$,
- $P_2 = (2, 3, 4, 6)$, $\theta(P_2) = 1$,
- $P_3 = (2, 4, 6)$, $\theta(P_3) = 1$,
- $P_4 = (2, 4, 7, 6)$, $\theta(P_4) = 2$

Tali cammini, e le relative quantità di flusso, possono essere individuati selezionando iterativamente un cammino orientato P, con flusso positivo, da un nodo origine o ad un nodo destinazione d, e scegliendo $\theta(P)$ pari al minimo tra il flusso lungo gli archi di P, l'offerta di o (cambiata di segno) e la domanda di d. Nell'esempio, $\theta(P)$ è sempre il minimo flusso lungo gli archi di P. Prima di eseguire l'iterazione successiva, cioè cercare il cammino successivo, il flusso lungo gli archi di P, l'offerta di o (cambiata di segno) e la domanda di d vanno ridotti di $\theta(P)$. Tale procedimento, che va iterato fino a che l'offerta dei nodi origine e la domanda dei nodi destinazione è ridotta a zero, consente di individuare un insieme di cammini orientati lungo i quali "fluiscono", in accordo a x, le 6 unità di flusso dai nodi origine (1 e 2) al nodo destinazione.

A questo punto, per ottenere x basta inviare un flusso unitario lungo il ciclo $C = (3, 4, 5)$, come mostrato in figura.



3) Si risolva il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 per l'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo SPT.S. Per ogni iterazione si indichino il nodo u estratto da Q, i valori delle etichette e dei predecessori dei nodi e l'insieme Q al termine dell'iterazione. Si fornisca alla fine l'albero trovato.

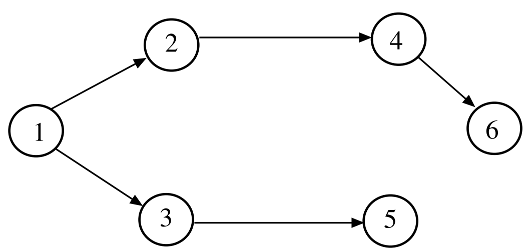


SVOLGIMENTO

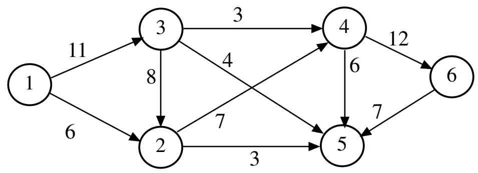
$M = (n-1)C_{max} + 1 = 5 \times 8 + 1 = 41.$

it.	u	$p[\cdot]$						$d[\cdot]$						Q
0		*nil*	1	1	1	1	1	0	41	41	41	41	41	$\{1\}$
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	0	2	1	41	41	8	$\{2,3,6\}$
2	3	*nil*	1	1	1	3	3	0	2	1	41	4	7	$\{2,5,6\}$
3	2	*nil*	1	1	2	3	2	0	2	1	5	4	6	$\{4,5,6\}$
4	5	*nil*	1	1	2	3	2	0	2	1	5	4	6	$\{4,6\}$
5	4	*nil*	1	1	2	3	4	0	2	1	5	4	5	$\{6\}$
6	6	*nil*	1	1	2	3	4	0	2	1	5	4	5	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura.

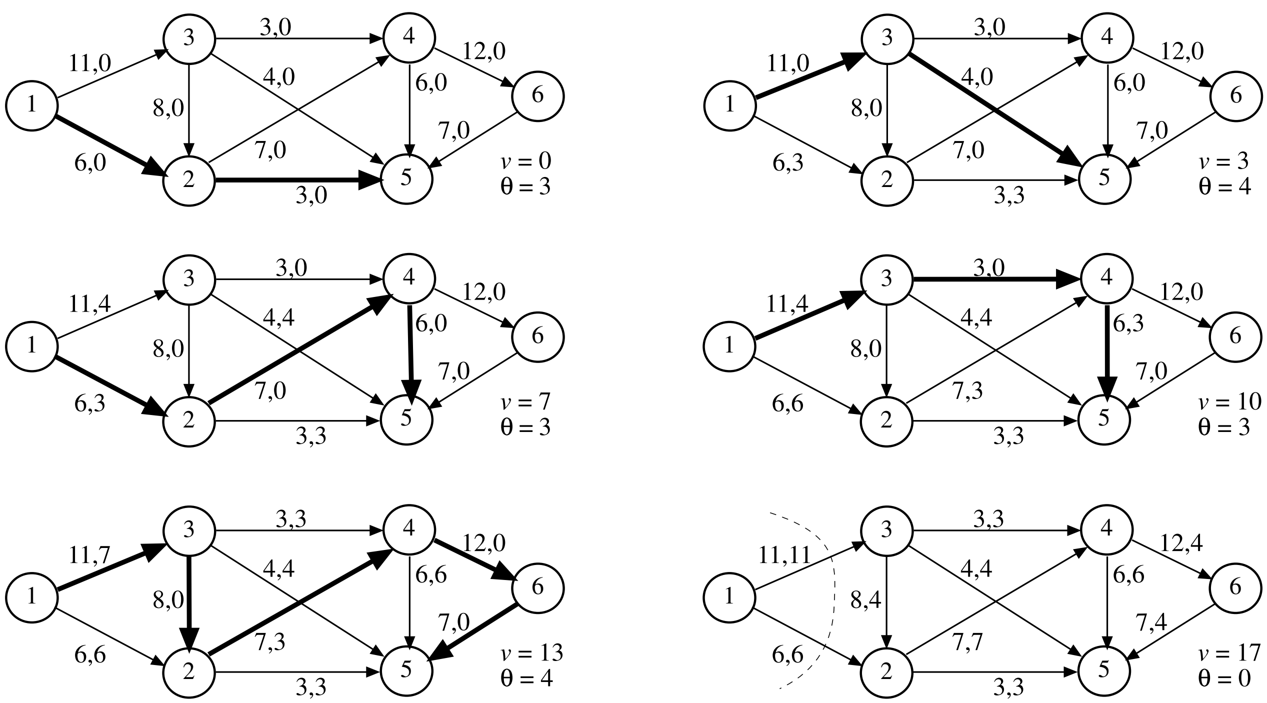


4) Si risolva il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 5 relativamente all'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Ad ogni iterazione indicare il flusso x, il suo valore v, il cammino aumentante utilizzato e la sua capacità θ. Al termine indicare il taglio di capacità minima determinato dall'algoritmo.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono mostrate in figura, dall'alto in basso e da sinistra a destra. Il secondo numero sugli archi è il valore del flusso. Gli archi in neretto indicano il cammino aumentante selezionato. Nella figura corrispondente all'ultima iterazione, la linea tratteggiata indica il taglio di capacità minima (pari al valore $v = 17$ del flusso) individuato dall'algoritmo; si noti che quello individuato dall'algoritmo non è l'unico taglio di capacità minima, infatti ha la stessa capacità, pari a 17, anche il taglio $N_s = \{1, 2, 3\}$, $N_t = \{4, 5, 6\}$.



5) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & 2x_1 & & & - & 2x_3 & & \\ & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (5, 0, 1)$ è ottima per il problema. Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia simmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA \geq c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano le condizioni degli scarti complementari

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \qquad i = 1, ..., m, \tag{1}$$

$$(\bar{y}A^j - c^j)\bar{x}_j = 0 \qquad j = 1, ..., n. \tag{2}$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcrcl} \max & 2x_1 & & & - & 2x_3 & & \\ & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcr} \min & 4y_1 & + & 4y_2 & + & 2y_3 & & \\ & y_1 & + & y_2 & & & \geq & 2 \\ & -y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & 0 \\ & -y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \geq & -2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (5, 0, 1)$ è ammissibile per (P). Poiché l'insieme degli indici dei vincoli attivi è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{1, 2\}$, $\bar{y}$ deve soddisfare la condizione $\bar{y}_3 = 0$ affinché (1) sia verificata. Poiché l'unica componente nulla di $\bar{x}$ è $\bar{x}_2$, (2) è verificata se e solo se risulta $\bar{y}A^1 - c_1 = 0$ e $\bar{y}A^3 - c_3 = 0$, ovvero se $\bar{y}$ soddisfa il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1 & + & y_2 & & & = & 2 \\ -y_1 & - & y_2 & + & y_3 & = & -2 \end{array} \right.$$

Ponendo $y_3 = 0$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $\bar{y} = (\lambda, 2 - \lambda, 0)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, ciascuna delle quali soddisfa insieme a $\bar{x}$ le condizioni degli scarti complementari (1) e (2). Affinché una tale $\bar{y}$ risulti ammissibile per (D), deve essere a componenti non negative, ovvero $0 \leq \lambda \leq 2$, e deve soddisfare il vincolo $yA^2 \geq c_2$, ovvero $-\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 \geq 0$, che è verificato quando $\lambda \leq 1$. In conclusione, ogni $\bar{y} = (\lambda, 2 - \lambda, 0)$ con $0 \leq \lambda \leq 1$ è ammissibile per (D) ed in scarti complementari con $\bar{x}$: quindi $\bar{x}$ è una soluzione ottima per (P).

6) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice entrante h, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{3, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = 1,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\} = \min\{1, 2/2\} = 1,$$

$$h = \min\{i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\} = \min\{3, 4\} = 3.$$

it.2) $B = \{1, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{2, 5\} = 2,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 0, \quad h = 4.$$

it. 3) $B = \{1, 2\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\bar{x}$ è ammissibile e quindi l'algoritmo termina.

$B = \{1, 2\}$ è una base ottima con $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ le relative soluzioni ottime.