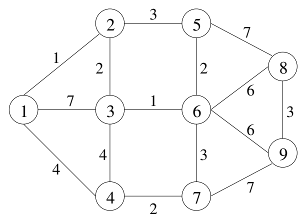
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2004/05)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{M}}$ **Matricola**

1) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame; quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso, mostrare un taglio e, nel secondo, fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo $T = (N, A_T)$.

La soluzione è unica? Giustificare la risposta.

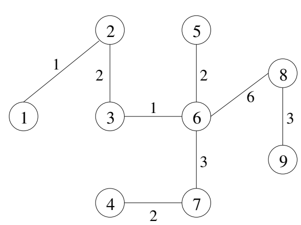


SVOLGIMENTO

Si consideri il seguente ordinamento degli archi per costo non decrescente:
$(1,2), (3,6), (2,3), (4,7), (5,6), (2,5), (6,7), (8,9), (1,4), (3,4), (6,8), (6,9), (1,3), (5,8), (7,9)$.

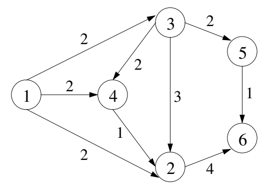
	arco	operazione	taglio	ciclo
it.1)	$(1,2)$	inserzione	$(\{1\}, \{2,3,4,5,6,7,8,9\})$	
it.2)	$(3,6)$	inserzione	$(\{3\}, \{1,2,4,5,6,7,8,9\})$	
it.3)	$(2,3)$	inserzione	$(\{1,2\}, \{3,4,5,6,7,8,9\})$	
it.4)	$(4,7)$	inserzione	$(\{4\}, \{1,2,3,5,6,7,8,9\})$	
it.5)	$(5,6)$	inserzione	$(\{5\}, \{1,2,3,4,6,7,8,9\})$	
it.6)	$(2,5)$	cancellazione		$(2,5,6,3)$
it.7)	$(6,7)$	inserzione	$(\{4,7\}, \{1,2,3,5,6,8,9\})$	
it.8)	$(8,9)$	inserzione	$(\{8\}, \{1,2,3,4,5,6,7,9\})$	
it.9)	$(1,4)$	cancellazione		$(1,4,7,6,3,2)$
it.10)	$(3,4)$	cancellazione		$(3,4,7,6)$
it.11)	$(6,8)$	inserzione	$(\{8,9\}, \{1,2,3,4,5,6,7\})$	

L'algoritmo termina all'iterazione 11, con l'albero T in figura, in quanto $|A_T| = n - 1 = 8$.



La soluzione trovata non è unica in quanto si può ottenere una soluzione ottima alternativa sostituendo l'arco $(6,8)$ con l'arco $(6,9)$ di ugual costo: infatti, aggiungendo quest'ultimo alla soluzione trovata si crea il ciclo $(6,8,9)$, da cui possiamo rimuovere l'arco di costo massimo $(6,8)$, ottenendo così un albero di copertura diverso dal precedente ma di costo uguale e quindi minimo.

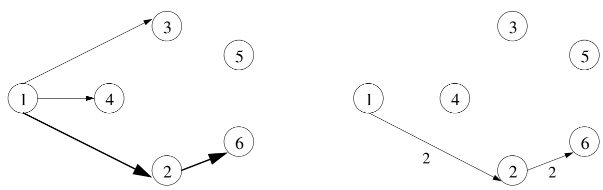
2) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Durante la ricerca di un cammino aumentante, si visitino gli archi della stella uscente del nodo correntemente esaminato secondo l'ordine crescente dei rispettivi nodi testa (ad es., (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.



SVOLGIMENTO

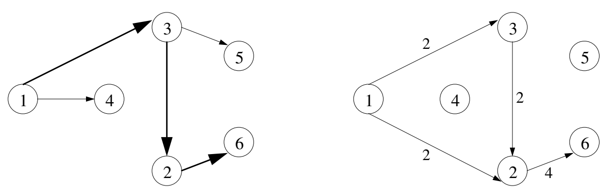
Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

Iterazione 1: $(x = 0,\ v = 0)$



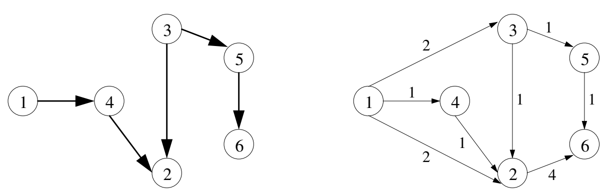
$\theta(P, x) = 2, \quad v = 2$

Iterazione 2:



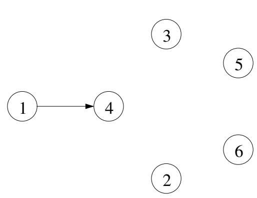
$\theta(P, x) = 2, \quad v = 4$

Iterazione 3:



$\theta(P, x) = 1, \quad v = 5$

Iterazione 4:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo ed inoltre il taglio $N_s = \{1, 4\}$, $N_t = \{2, 3, 5, 6\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 2 + 1 + 2 = 5 = v$.

3) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrl} \max & 2x_1 & + & 7x_2 & \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq 5 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq 6 \\ & x_1 & + & 4x_2 & \leq 6 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq 4 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (2, 1)$ è ottima per il problema. In caso affermativo, si individui l'insieme delle soluzioni duali ottime. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni $\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m$.

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrl} \max & 2x_1 & + & 7x_2 & \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq 5 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq 6 \\ & x_1 & + & 4x_2 & \leq 6 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq 4 \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrl} \min & 5y_1 & + & 6y_2 & + & 6y_3 & + & 4y_4 & \\ & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = 2 \\ & 3y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & = 7 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq 0. \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (2, 1)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{1, 3\}$. Segue che una soluzione duale $\bar{y}$, tale che $\bar{y}A = c$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\bar{y}_2 = \bar{y}_4 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} y_1 & + & y_3 & = 2 \\ 3y_1 & + & 4y_3 & = 7 \\ y_1, & & y_3 & \geq 0 \end{array} \right.$$

Tale sistema ammette come unica soluzione $(1, 1)$. Poiché tale soluzione ha componenti non negative, $\bar{y} = (1, 0, 1, 0)$ è ammissibile per (D). Segue che $\bar{x}$ è una soluzione ottima per (P), mentre $\bar{y} = (1, 0, 1, 0)$ è l'unica soluzione ottima di (D), essendo l'unica soluzione ammissibile di (D) che soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$.

4) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -2x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -4x_1 & & & \leq & 0 \\
 & & & x_2 & \leq & 8 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 12
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1,2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = \min\{1, 2\} = 1 \text{ [regola anticiclo di Bland]}, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = -\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{3, 4\}, \quad \lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi, \quad \lambda_3 = 0, \ \lambda_4 = 8$$

$$\bar{\lambda} = \min\{\lambda_3, \lambda_4\} = 0, \quad k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = 3 \text{ [cambio di base degenere].}$$

it.2) $B = \{2,3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/4 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 2, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \{4, 5\}, \quad \lambda_4 = 8, \lambda_5 = 12, \bar{\lambda} = \lambda_4 = 8, k = 4$$

it.3) $B = \{3,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 3, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad J = \{5\}, \quad \lambda_5 = \bar{\lambda} = 8, k = 5$$

it.4) $B = \{4,5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \text{STOP.}$$

$x = \begin{bmatrix} 2 & 8 \end{bmatrix}$ è ottima per il primale, mentre $y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ è ottima per il duale.