## RICERCA OPERATIVA (a.a. 2005/06)

# Nome Cognome:

**Corso di Laurea:** $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{M}}$ **Matricola:** **Corso:** $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$

**1)** Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & & + & x_2 & \leq & 5 \\ & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (3, 5)$ è ottima per il problema. Giustificare la risposta.

**SVOLGIMENTO**

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

**Teorema.** Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per $(P)$ e $(D)$, esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & & + & x_2 & \leq & 5 \\ & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{lrcrcrcrcl} \min & 8y_1 & + & 12y_2 & + & 5y_3 & + & 4y_4 & & \\ & y_1 & + & 2y_2 & & & + & 3y_4 & = & 1 \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & - & y_4 & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0. \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (3, 5)$ è ammissibile per $(P)$. L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{1, 3, 4\}$. Di conseguenza una soluzione duale $\bar{y}$, tale che $\bar{y}A = c$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\bar{y}_2 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per $(D)$, essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} y_1 & & & + & 3y_4 & = & 1 \\ y_1 & + & y_3 & - & y_4 & = & 2 \\ y_1, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Posto $y_4 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $\bar{y}_\alpha = (1 - 3\alpha, 1 + 4\alpha, \alpha)$. Tali soluzioni hanno componenti non negative per $0 \leq \alpha \leq 1/3$. Pertanto, per tali valori di $\alpha$ l'insieme di soluzioni $\bar{y}_\alpha$ è ammissibile per $(D)$. Poiché ciascuna $\bar{y}_\alpha$ soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$, dal teorema segue che $\bar{x}$ è una soluzione ottima per $(P)$.

**2)** Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & & & \leq & 1 \end{array}$$

(a) Si indichino basi che siano rispettivamente: *(i)* primale ammissibile e non degenere *(ii)* primale non ammissibile e degenere *(iii)* duale ammissibile e degenere *(iv)* duale ammissibile e non degenere.

(b) Si individui geometricamente l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema.

(c) Si modifichi la funzione obiettivo in modo che il nuovo problema risulti essere superiormente illimitato.

Giustificare tutte le risposte.

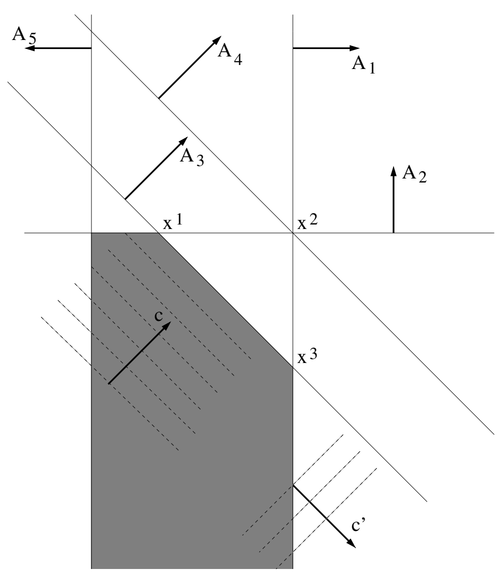
**SVOLGIMENTO**

(a) $B_1 = \{2,3\}$ soddisfa sia $(i)$ che $(iii)$: la soluzione primale associata $x^1$ è ammissibile (vedi figura) e non degenere in quanto $I(x^1) = B_1$; essendo $c = A_3$, la soluzione duale associata risulta essere $y^1 = (0,0,1,0,0)$, che è ammissibile in quanto tutte le componenti sono non negative ed è degenere poiché $y^1_2 = 0$.

$B_2 = \{1,2\}$ soddisfa sia $(ii)$ che $(iv)$: la soluzione primale associata $x^2$ non è ammissibile (vedi figura) ed è degenere in quanto $I(x^2) = \{1,2,4\} \supset B_2$; la soluzione duale associata è ammissibile in quanto $c \in$ cono $(A_1, A_2)$ ed è non degenere in quanto $c$ non è parallelo né ad $A_1$ né ad $A_2$ e quindi entrambe le componenti in base sono diverse da zero.

(b) In figura viene riportata, per alcuni valori crescenti di $z$, la retta $x_1 + x_2 = z$, che definisce l'insieme delle soluzioni (anche non ammissibili) per cui la funzione obiettivo vale $z$. Al crescere di $z$ la retta viene traslata nella direzione individuata da $c = (1,1)$ e ha intersezione non vuota con la regione ammissibile fino a quando viene a coincidere con il vincolo individuato da $A_3$. Quindi, l'insieme delle soluzioni ottime è costituito dal segmento che unisce $x^1$ e $x^3$.

(c) Basta individuare un vettore $c'$ tale che la retta $c'x = z$ abbia intersezione non vuota con la regione ammissibile per ogni valore di $z$ sufficientemente grande. Ad esempio, $c' = (1,-1)$ verifica questa condizione come illustrato in figura.



**3)** Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rcrcr} \max & - & x_2 & & \\ & & x_2 & \leq & 4 \\ -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ -x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 & & & \leq & -1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2,4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

**SVOLGIMENTO**

it.1) $$B = \{2,4\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = 2, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{3,5\},$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi, \quad \lambda_3 = 3, \quad \lambda_5 = 3, \bar{\lambda} = \min\{\lambda_3, \lambda_5\} = 3,$$

$$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = \min\{3,5\} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

it.2) $$B = \{3,4\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 4, \quad B(h) = 2,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \{5\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_5 = 0, \quad k = 5 \text{ [cambio di base degenere]}$$

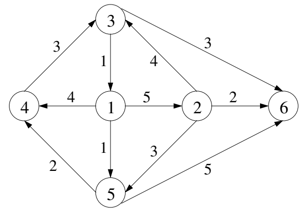
it.3) $$B = \{3,5\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h = 3, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

Poiché $A_N \xi \leq 0$, il problema è superiormente illimitato ed il suo duale è vuoto.

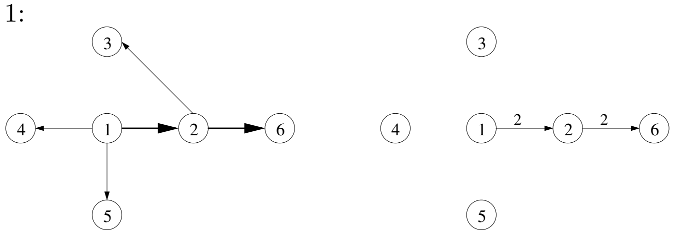
**4)** Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Durante la ricerca di un cammino aumentante, si visitino gli archi della stella uscente del nodo correntemente esaminato secondo l'ordine crescente dei rispettivi nodi testa (ad es., (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi $N_s$, l'insieme dei nodi $N_t$ e la capacità del taglio.



**SVOLGIMENTO**

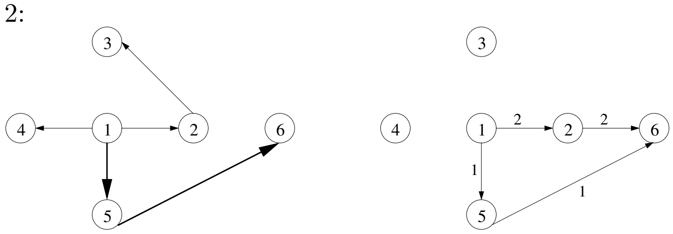
Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita con evidenziato il cammino aumentante $P$ individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo $P$ (omettendo gli archi con flusso nullo).

Iterazione 1:



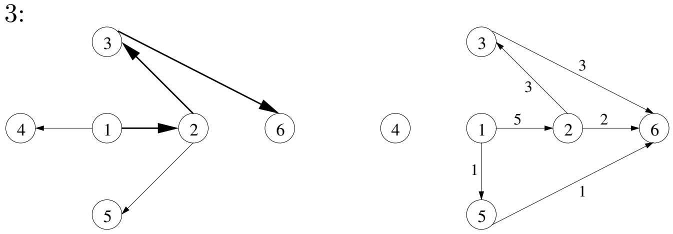
$P = \{1, 2, 6\}, \quad \theta(P, x) = 2, \quad v = 2$

Iterazione 2:



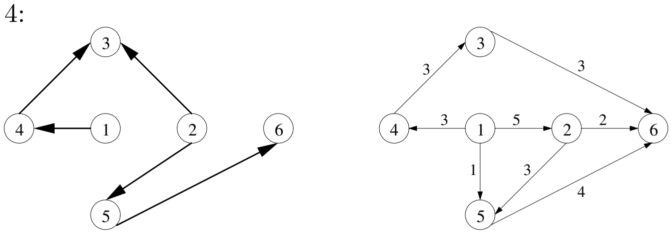
$P = \{1, 5, 6\}, \quad \theta(P, x) = 1, \quad v = 3$

Iterazione 3:



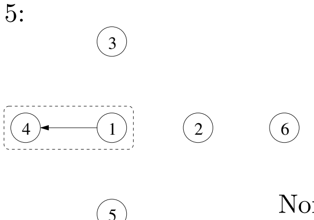
$P = \{1, 2, 3, 6\}, \quad \theta(P, x) = 3, \quad v = 6$

Iterazione 4:



$P = \{1, 4, 3, 2, 5, 6\}, \quad \theta(P, x) = 3, \quad v = 9$

Iterazione 5:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo ed il taglio $N_s = \{1, 4\}$, $N_t = \{2, 3, 5, 6\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 5 + 1 + 3 = 9$.