RICERCA OPERATIVA (a.a. 2005/06)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{M}}$ **Matricola:** **Corso:** $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$

1) L'organizzazione degli ambulanti abusivi della provincia di Pisa deve pianificare la copertura del litorale pisano per l'imminente stagione balneare. L'organizzazione dispone di n venditori per servire le m zone in cui ha diviso il territorio. Ogni venditore deve operare in una sola zona proponendo esattamente una delle tre tipologie di mercanzie trattate dall'organizzazione. Per ciascun venditore i, $i = 1,..,n$, è noto il ricavo medio r_{ik} ottenibile proponendo ognuna delle tipologie di prodotti k, $k = 1, 2, 3$. Per non lasciare spazio ad eventuali concorrenti, l'organizzazione vuole occupare il mercato disponendo in ogni zona venditori la cui somma dei ricavi sia non inferiore a un livello R_k per la tipologia k. Per evitare fenomeni di saturazione, in ogni zona devono operare non più di 10 venditori. Si formuli in termini di P.L.I. il problema di assegnare gli n venditori alle m zone decidendo contestualmente la tipologia di prodotti venduta, rispettando i limiti sui ricavi minimi e sul numero di venditori per zona e massimizzando il ricavo totale atteso dall'organizzazione.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se il venditore } i \text{ è assegnato alla zona } j \text{ per la tipologia } k \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1,..,n, \quad j = 1,..,m, \quad k = 1,2,3.$$

Ogni venditore propone esattamente una tipologia di merce in una zona:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} = 1 \qquad i = 1,..,n.$$

Il ricavo ottenuto in ogni zona per le diverse tipologie di prodotti non può scendere sotto il livello minimo:

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ik}x_{ijk} \geq R_k \qquad j = 1,..,m, \quad k = 1,2,3.$$

Il numero di venditori presenti in ogni zona non supera le 10 unità:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} \leq 10 \qquad j = 1,..,m.$$

Il ricavo complessivo, da massimizzare, è dato da

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{3} r_{ik}x_{ijk}.$$

La formulazione risultante è la seguente:

$$\begin{array}{lll}
\max & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{3} r_{ik}x_{ijk} & \\[2ex]
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} = 1 & i = 1,..,n \\[2ex]
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_{ik}x_{ijk} \geq R_k & j = 1,..,m \quad k = 1,2,3 \\[2ex]
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} \leq 10 & j = 1,..,m \\[2ex]
 & x_{ijk} \in \{0,1\} & i = 1,..,n, \quad j = 1,..,m, \quad k = 1,2,3
\end{array}$$

2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$(P) \quad \max\{\ cx\ :\ Ax \leq b,\ x \geq 0\ \}.$$

Supponiamo che il sistema

$$(S) \quad \begin{cases} A\xi & \leq & 0 \\ \xi & \geq & 0 \\ c\xi & > & 0 \end{cases}$$

ammetta una soluzione $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che se (P) è non vuoto, allora è superiormente illimitato.

SVOLGIMENTO

Sia $\bar{x}$ una qualsiasi soluzione ammissibile per (P) e consideriamo $x(\lambda) := \bar{x} + \lambda\bar{\xi}$. Tale soluzione risulta essere ammissibile per ogni $\lambda \in \mathbb{R}_+$; infatti:

$$Ax(\lambda) = A\bar{x} + \lambda A\bar{\xi} \leq A\bar{x} \leq b$$

e

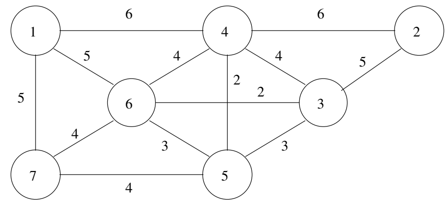
$$x(\lambda) = \bar{x} + \lambda\bar{\xi} \geq \bar{x} \geq 0$$

dove le prime disuguaglianze di entrambe le espressioni seguono dal fatto che $\bar{\xi}$ risolve (S) e $\lambda \geq 0$, mentre le seconde dall'ammissibilità di $\bar{x}$. Inoltre, il valore della funzione obiettivo cresce indefinitamente al crescere di λ:

$$cx(\lambda) = c\bar{x} + \lambda c\bar{\xi} \longrightarrow +\infty \quad \text{per} \quad \lambda \longrightarrow +\infty$$

in quanto $c\bar{\xi} > 0$. Quindi (P) è superiormente illimitato.

3) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame e quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo $T = (N, A_T)$.

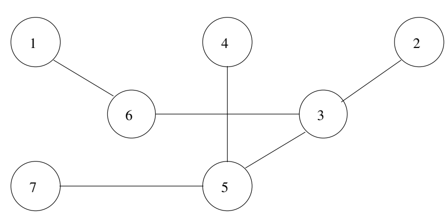


SVOLGIMENTO

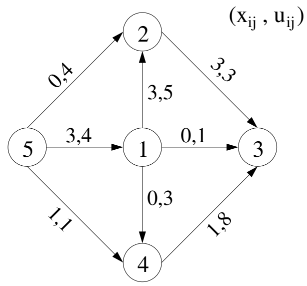
Si consideri il seguente ordinamento degli archi per costo non decrescente:
$(3,6), (4,5), (3,5), (5,6), (3,4), (4,6), (5,7), (6,7), (1,6), (1,7), (2,3), (1,4), (2,4)$.

	arco	operazione	taglio	ciclo
it.1)	$(3,6)$	inserzione	$(\{3\}, \{1,2,4,5,6,7\})$	
it.2)	$(4,5)$	inserzione	$(\{4\}, \{1,2,3,5,6,7\})$	
it.3)	$(3,5)$	inserzione	$(\{3,6\}, \{1,2,4,5,7\})$	
it.4)	$(5,6)$	cancellazione		$(5,3,6)$
it.5)	$(3,4)$	cancellazione		$(3,5,4)$
it.6)	$(4,6)$	cancellazione		$(4,5,3,6)$
it.7)	$(5,7)$	inserzione	$(\{1,2,3,4,5,6\}, \{7\})$	
it.8)	$(6,7)$	cancellazione		$(6,3,5,7)$
it.9)	$(1,6)$	inserzione	$(\{1\}, \{2,3,4,5,6,7\})$	
it.10)	$(1,7)$	cancellazione		$(1,6,3,5,7)$
it.11)	$(2,3)$	inserzione	$(\{2\}, \{1,3,4,5,6,7\})$	

L'algoritmo termina all'iterazione 11 con l'albero T in figura, in quanto $|A_T| = n - 1 = 6$.



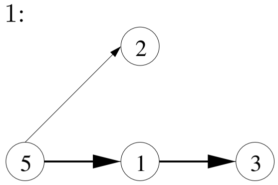
4) Si individui un flusso massimo dal nodo 5 al nodo 3 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato in figura. Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.

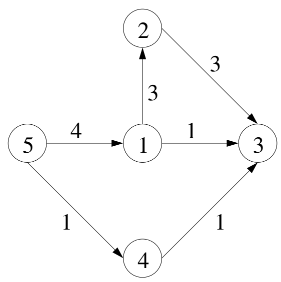


SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita con evidenziato il cammino aumentante P individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P (omettendo gli archi con flusso nullo). Il valore del flusso dato è $v = 4$.

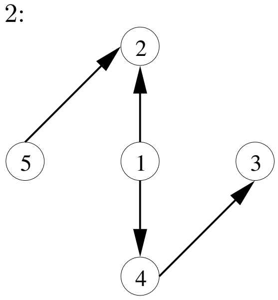
Iterazione 1:

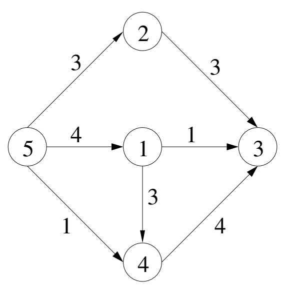




$P = \{5, 1, 3\}, \quad \theta(P, x) = 1, \quad v = 5$

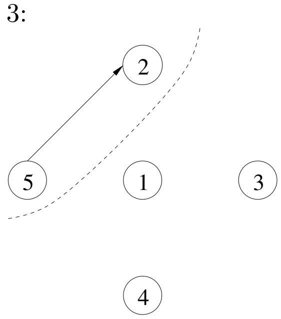
Iterazione 2:





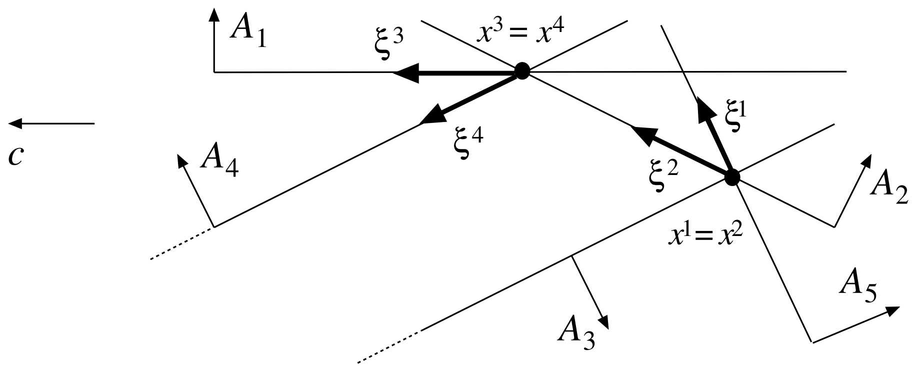
$P = \{5, 2, 1, 4, 3\}, \quad \theta(P, x) = 3, \quad v = 8$

Iterazione 3:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo ed il taglio $N_s = \{5, 2\}$, $N_t = \{1, 3, 4\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 1 + 4 + 3 = 8$.

5) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL di figura a partire dalla base $B = \{3, 5\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



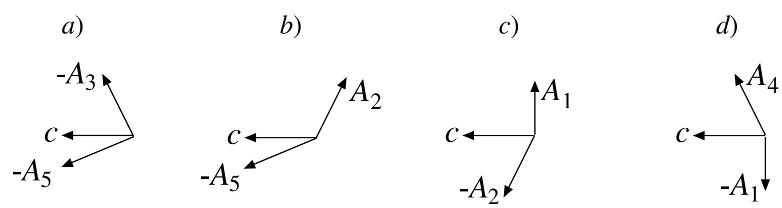
SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{3, 5\}$, $y_3 < 0$ e $y_5 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_3$ e $-A_5$, come mostrato in figura a); quindi, $h = \min\{3, 5\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. La base è primale degenere, in quanto $I(x^1) = \{2, 3, 5\}$, ma duale non degenere. Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza al vincolo 2, che è attivo: si esegue quindi un cambio di base degenere, selezionando $k = 2$.

it.2) $B = \{2, 5\}$, $y_2 > 0$ e $y_5 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_2 e $-A_5$, come mostrato in figura b); quindi, $h = 5$. La base è quindi duale non degenere, mentre resta ovviamente primale degenere in quanto $x^2 = x^1$ implica $I(x^2) = I(x^1)$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza ai vincoli 1 e 4, e quindi $k = \min\{1, 4\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it.3) $B = \{1, 2\}$, $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_2$, come mostrato in figura c); quindi, $h = 2$. La base è quindi duale non degenere, ma è primale degenere in quanto $I(x^3) = \{1, 2, 4\}$. Infatti, il massimo passo lungo la direzione ξ^3 è zero, e si ottiene proprio in corrispondenza al vincolo 4, attivo ma non in base: si esegue quindi un altro cambio di base degenere selezionando $k = 4$.

it.4) $B = \{1, 4\}$, $y_1 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e A_4, come mostrato in figura d); quindi, $h = 1$. La base è quindi duale non degenere, mentre resta ovviamente primale degenere. Poiché non esistono gradienti dei vincoli fuori base che abbiano prodotto scalare positivo con ξ^4 (A_2 ed A_5 lo hanno negativo, mentre A_3, essendo perpendicolare a ξ^4, lo ha nullo) l'algoritmo termina avendo determinato che il primale è superiormente illimitato, e di conseguenza il duale è vuoto.



6) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & -4 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & - & x_2 & \leq & -8 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{2, 5\} = 2$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\} = \min\{1, 1\} = 1,$$

$$h = \min\{i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\} = \min\{1, 3\}.$$

it. 2) $B = \{2, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{4, 5\} = 4,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 0, \quad h = 3.$$

it. 3) $B = \{2, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad k = 5,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathit{STOP}$$

Poiché $\eta_B \leq 0$, il problema duale è inferiormente illimitato ed il problema primale è vuoto.