RICERCA OPERATIVA (a.a. 2005/06)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: I SI M **Matricola:** **Corso:** A B

1) La famiglia Rossi deve recarsi in un centro commerciale per la spesa del fine settimana. Dopo aver esaminato la cartina stradale, descritta mediante un grafo orientato $G = (N, A)$, decide di recarsi o al centro Con, situato nel nodo t_1 di G, oppure al centro SLung, situato nel nodo t_2 di G. La famiglia Rossi si pone quindi il problema di individuare un percorso in G dal nodo s, dove si trova la sua abitazione, fino al nodo t_1 oppure fino al nodo t_2. Noto il tempo di viaggio t_{ij} associato ad ogni collegamento $(i,j) \in A$, i Rossi vogliono individuare un percorso il cui tempo complessivo di viaggio non superi un tempo massimo prefissato T.

Indicando con c_{ij} il costo di attraversamento di ogni collegamento $(i,j) \in A$, si formuli in termini di P.L.I. il problema di individuare un cammino che parta da s ed arrivi o al nodo t_1 oppure al nodo t_2, il cui tempo di viaggio non superi T e che abbia costo totale di attraversamento minimo.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti variabili di flusso:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il collegamento } (i,j) \in A \text{ fa parte del percorso scelto dai Rossi,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad (i,j) \in A.$$

Introduciamo inoltre una variabile booleana, y, per decidere se il percorso avrà il nodo t_1 oppure il nodo t_2 come nodo destinazione:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{se il percorso ha } t_1 \text{ come nodo destinazione,} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La richiesta di individuare un percorso in G dal nodo s al nodo t_1 oppure al nodo t_2 può essere quindi espressa mediante i seguenti vincoli di conservazione di flusso:

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} 0, & i \in N, i \neq s, t_1, t_2 \\ -1, & i = s \\ y, & i = t_1 \\ 1-y, & i = t_2. \end{cases}$$

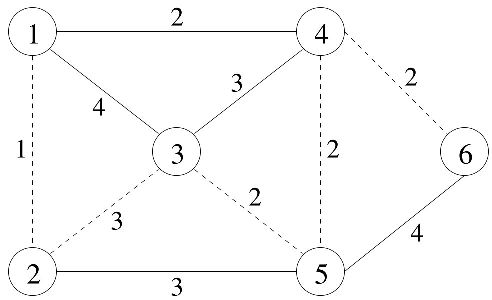
Il vincolo relativo al tempo complessivo di viaggio può invece essere espresso mediante:

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij} \leq T.$$

La funzione obiettivo, da minimizzare, è $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$:

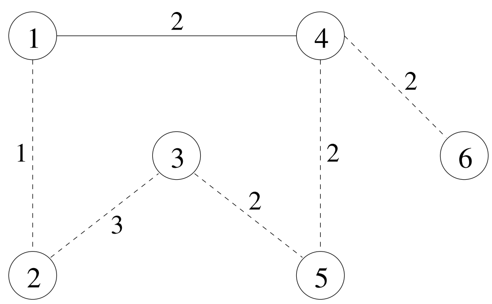
$$(P) \quad \begin{array}{l} \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} 0, & i \in N, i \neq s, t_1, t_2 \\ -1, & i = s \\ y, & i = t_1 \\ 1-y, & i = t_2. \end{cases} \\ \sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij} \leq T \\ x_{ij} \in \{0,1\} \qquad (i,j) \in A \\ y \in \{0,1\} \end{array}$$

2) Si consideri il problema di determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Si indichi se l'albero di copertura individuato dagli archi tratteggiati è una soluzione ottima del problema. Giustificare la risposta.

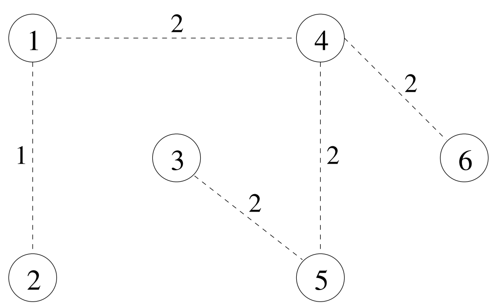


SVOLGIMENTO

L'arco $(1, 4)$ ha un costo minore di alcuni archi appartenenti all'albero dato. Aggiungendo tale arco all'albero si crea il ciclo $(1, 4, 5, 3, 2)$.

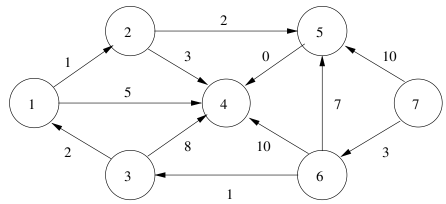


L'arco di costo massimo nel ciclo è $(2, 3)$: rimuovendolo, si ottiene un albero di costo minore di quello dato.



Conseguentemente, l'albero dato non è una soluzione ottima del problema.

3) Si verifichi se il grafo in figura è aciclico. Si determini poi un albero dei cammini minimi di radice $r = 1$ (dopo l'eventuale rinumerazione), utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e motivando la scelta effettuata. Per ciascuna iterazione si forniscano il nodo i selezionato, i vettori delle etichette e dei predecessori. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



SVOLGIMENTO

Rinumerando i nodi come segue

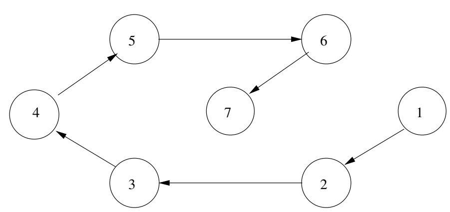
originale	1	2	3	4	5	6	7
rinumerato	4	5	3	7	6	2	1

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista computazionale risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo). Nello svolgimento si utilizzano i nomi dei nodi dopo la rinumerazione.

$$M = (n - 1) \max\{c_{ij} : (i, j) \in A\} + 1 = 6 \times 10 + 1 = 61.$$

it.	i	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
0		*nil*	1	1	1	1	1	1	0	61	61	61	61	61	61
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	1	0	3	61	61	61	10	61
2	2	*nil*	1	2	1	1	1	2	0	3	4	61	61	10	13
3	3	*nil*	1	2	3	1	1	3	0	3	4	6	61	10	12
4	4	*nil*	1	2	3	4	1	4	0	3	4	6	7	10	11
5	5	*nil*	1	2	3	4	5	5	0	3	4	6	7	9	10
6	6	*nil*	1	2	3	4	5	6	0	3	4	6	7	9	9

Albero dei cammini minimi individuato:



4) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & & & & \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \leq & 4
\end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$y_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = \min\{1, 2\} = 1 \;\; \text{[regola anticiclo di Bland]}, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{3, 4, 5\},$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = 2, \quad \lambda_5 = 10, \quad \bar{\lambda} = \min\{\lambda_i \; : \; i \in J\} = \min\{2, 2, 10\} = 2,$$

$$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = \min\{3, 4\} = 3 \;\; \text{[regola anticiclo di Bland]}$$

it.2) $B = \{2, 3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 2, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$J = \{4, 5\}, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = 2, \quad \bar{\lambda} = \min\{0, 2\} = 0, \quad k = 4 \;\; \text{[cambio di base degenere]}$$

it.3) $B = \{3, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 3, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \{5\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_5 = 4, \quad k = 5$$

it.4) $B = \{4, 5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP}$$

$x = (4, 2)$ è ottima per il primale, mentre $y = (0, 0, 0, 0, 1)$ è ottima per il duale.

5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (2, -2)$ è ottima per il problema. In caso affermativo, si individui l'insieme delle soluzioni duali ottime. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P)\ \begin{array}{c} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D)\ \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

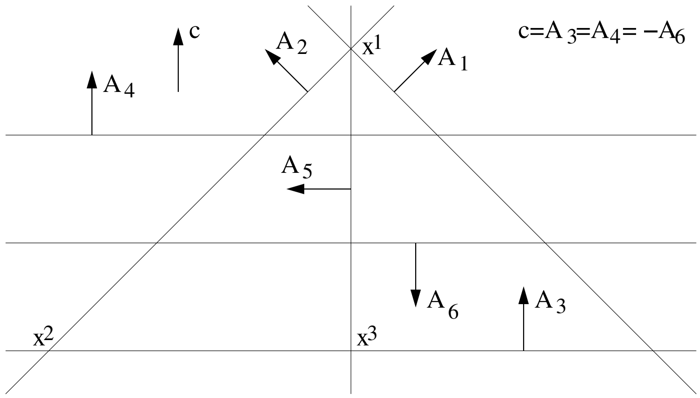
$$(P)\ \begin{array}{rrcrcl} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \end{array} \qquad (D)\ \begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \min & 4y_1 & + & 2y_2 & + & 2y_3 & + & 2y_4 & + & 4y_5 & & \\ & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & + & y_5 & = & 3 \\ & 2y_1 & & & - & 2y_3 & + & y_4 & - & y_5 & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0. \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (2, -2)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{2, 3, 5\}$. Segue che una soluzione duale $\bar{y}$, tale che $\bar{y}A = c$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\bar{y}_1 = \bar{y}_4 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} y_2 & - & y_3 & + & y_5 & = & 3 \\ & - & 2y_3 & - & y_5 & = & 1 \\ y_2, & & y_3, & & y_5 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Tale sistema non ammette soluzioni. La seconda equazione infatti è a coefficienti negativi e termine noto positivo, non può quindi ammettere soluzioni a valori tutti non negativi. Perciò, non esiste alcuna soluzione ammissibile per il problema (D) che verifichi gli scarti complementari con $\bar{x}$, che pertanto non è una soluzione ottima per (P).

6) Si risolva graficamente il problema di P.L. indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.

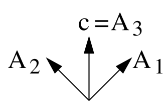


SVOLGIMENTO

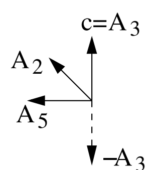
it. 1) $B = \{1, 2\}$, $k = \min\{3, 4\} = 3$ (regola anticiclo di Bland), $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ (in quanto $c \in \text{cono}(A_1, A_2)$ come mostrato in figura (a)). La base è primale degenere in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 5\}$, ma duale non degenere. Poiché $A_3 = c$, risultano $\eta_1 = y_1 > 0$, $\eta_2 = y_2 > 0$, $\bar{\theta} = y_1/\eta_1 = y_2/\eta_2 = 1$, $h = \min\{1, 2\} = 1$ (regola anticiclo di Bland).

it. 2) $B = \{2, 3\}$, $k = \min\{5, 6\} = 5$ (regola anticiclo di Bland), $y_2 = 0$, $y_3 = 1$ (in quanto $c = A_3$). La base è primale non degenere, ma duale degenere in quanto $y_2 = 0$. Poiché $A_5 \in \text{cono}(A_2, -A_3)$ (come mostrato in figura (b)), risultano $\eta_2 > 0$, $\eta_3 < 0$, $\bar{\theta} = y_2/\eta_2 = 0$, $h = 2$.

it. 3) $B = \{3, 5\}$, $k = 6$, $y_3 = 1$, $y_5 = 0$ (in quanto $c = A_3$). La base è primale non degenere, ma duale degenere in quanto $y_5 = 0$. Poiché $A_6 = -A_3$, risultano $\eta_3 = -1$, $\eta_5 = 0$. L'algoritmo termina in quanto $\eta_B \leq 0$ e quindi il problema duale è inferiormente illimitato ed il problema primale è vuoto.



(a)



(b)