RICERCA OPERATIVA (a.a. 2005/06)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: I SI M **Matricola:** **Corso:** A B

1) Tommaso sta pianificando la sua prossima partita a Scavolization^{TM}, famoso gioco a turni. In ciascuno degli n turni del gioco Tommaso deve scoprire una delle n tecnologie disponibili. Per poter individuare una data tecnologia, però, il giocatore deve aver già scoperto tutte le tecnologie ad essa "precedenti"; per ogni $i = 1, \ldots, n$ è dato un insieme $P(i)$, eventualmente vuoto, delle tecnologie che è necessario aver già scoperto per scoprire la tecnologia i. Tommaso ha deciso di perseguire una "cultural victory"; ogni tecnologia $i = 1, \ldots, n$, una volta scoperta, fornisce al giocatore c_i "punti cultura" per tutti i turni successivi a quello in cui viene scoperta, fino alla fine del gioco. Si scriva in termini di *P.L.I.* il problema di decidere in che ordine scoprire le n tecnologie, rispettando i vincoli di precedenza, in modo da massimizzare il numero di "punti cultura" ottenuti da Tommaso alla fine del gioco.

SVOLGIMENTO

Introduciamo n^2 variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la tecnologia } i \text{ viene scoperta per } j\text{-esima} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Possiamo quindi definire i coefficienti $c_{ij} = c_i(n-j)$, per $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, n$, che indicano la quantità totale di punti di cultura ottenuti in corrispondenza alla scelta $x_{ij} = 1$ (in quanto la tecnologia i è nota, e quindi produce punti, per esattamente $n - j$ degli n turni di gioco). Una formulazione del problema è quindi:

$$\begin{array}{lll} \max & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\ & x_{ij} \leq (\displaystyle\sum_{k \in P(i)} \sum_{h=1}^{j-1} x_{kh})/|P(i)| & i = 1, \ldots, n \ , \ j = 1, \ldots, n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n \ , \ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

I primi due blocchi di vincoli costituiscono i vincoli di assegnamento; essi garantiscono che ogni tecnologia i sia scoperta in esattamente uno degli n turni. Il terzo blocco di vincoli garantisce che x_{ij} non possa assumere valore 1 a meno che per ogni $k \in P(i)$ non si abbia $x_{kh} = 1$ per un qualche $h < j$ (e quindi che il numeratore del lato destro del vincolo valga esattamente $|P(i)|$), ossia che tutte le "tecnologie abilitanti" alla tecnologia i siano già state scoperte prima del turno j. Una diversa possibilità è quella di "disaggregare" questi vincoli, sostituendoli con

$$x_{ij} \leq \sum_{h=1}^{j-1} x_{kh} \qquad i = 1, \ldots, n \ , \ k \in P(i) \ , \ j = 1, \ldots, n$$

Ovviamente, se $P(i) = \emptyset$ non esistono vincoli del terzo tipo (in nessuna delle due versioni) relativamente alla tecnologia i.

2) Si formuli, in termini di P.L.I., il problema di minimizzare il costo mensile di stoccaggio $c(x)$ di un'azienda, che vale 0 nel caso in cui la quantità x di merce stoccata in magazzino sia compresa tra 0 e 10 bancali, ed è invece definito dalla funzione lineare $50 + x$ nel caso in cui il numero x di bancali stoccati sia maggiore di 10 e minore o uguale della capacità del magazzino, che è pari a 100 bancali. Per esigenze di produzione l'azienda necessita di stoccare almeno L bancali al mese. Si dimostri la correttezza della formulazione proposta.

SVOLGIMENTO

Il costo di stoccaggio dell'azienda è definito come:

$$c(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 10, \\ 50 + x, & \text{se } 10 < x \leq 100. \end{cases}$$

$c(x)$ è una funzione lineare a tratti, con due tratti, da minimizzare. La peculiarità di tale funzione è che essa vale zero nel primo tratto ($0 \leq x \leq 10$). Il problema può essere formulato introducendo una variabile decisionale y che distingua il caso in cui il numero x di bancali in magazzino appartenga al primo intervallo, vale a dire $0 \leq x \leq 10$ ($y = 0$), dal caso in cui il numero di bancali appartenga all'intervallo $10 \leq x \leq 100$ ($y = 1$). Per distingure inoltre la variabilità di x nel primo e nel secondo intervallo introduciamo una variabile z_1, che descrive la quantità di stock x nel primo intervallo, ed una variabile z_2, che descrive la quantità di stock x nel secondo intervallo. Introduciamo pertanto i vincoli $0 \leq z_1 \leq 10(1 - y)$ e $10y \leq z_2 \leq 100y$. Essendo mutuamente esclusivi, il legame tra x, z_1 e z_2 è espresso da $x = z_1 + z_2$. Bisogna inoltre imporre che la quantità stoccata sia maggiore o uguale a L: $z_1 + z_2 \geq L$. La funzione obiettivo, da minimizzare, è $g(z_1, z_2, y) = 50y + z_2$. Si ottiene quindi la seguente formulazione:

$$\begin{array}{lll} (P) & \min & 50y + z_2 \\ & & 0 \leq z_1 \leq 10(1 - y) \\ & & 10y \leq z_2 \leq 100y \\ & & z_1 + z_2 \geq L \\ & & y \in \{0, 1\} \end{array}$$

Dimostrazione di correttezza

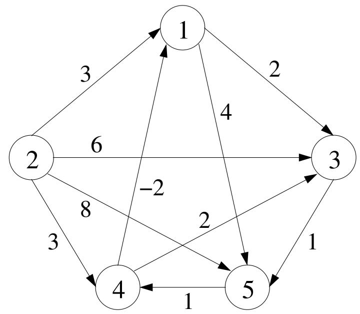
Quando $y = 0$ si ha $0 \leq z_1 \leq 10$ mentre $z_2 = 0$: la quantità x di merce in magazzino varia quindi nel primo intervallo ($x = z_1$). Il corrispondente valore della funzione obiettivo è $g(z_1, 0, 0) = 0$, in accordo con $c(x)$.

Quando invece $y = 1$ si ha $z_1 = 0$ mentre $10 \leq z_2 \leq 100$: la quantità x di merce in magazzino varia quindi nel secondo intervallo ($x = z_2$). In corrispondenza di tali valori di x la funzione obiettivo assume l'andamento lineare $g(0, z_2, 1) = 50 + z_2$, vale a dire $50 + x$, in accordo con $c(x)$ per $x > 10$. Osserviamo che il punto di discontinuità, $x = 10$, è rappresentato in (P) in modo duplice:

- $(z_1, z_2, y) = (10, 0, 0)$: in tal caso $g(10, 0, 0) = c(10) = 0$;
- $(z_1, z_2, y) = (0, 10, 1)$: in tal caso $g(0, 10, 1) = 60 > c(10) = 0$;

$(z_1, z_2, y) = (0, 10, 1)$ non è pertanto una rappresentazione corretta di $x = 10$. Poichè tuttavia $g(z_1, z_2, y)$ viene minimizzata, e $g(0, 10, 1) = 60 > g(10, 0, 0) = 0$, la rappresentazione $(z_1, z_2, y) = (0, 10, 1)$ non può costituire la soluzione ottima, e quindi l'ambiguità della rappresentazione di $x = 10$ è risolta a livello di ottimizzazione. (P) è quindi una rappresentazione corretta del problema.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



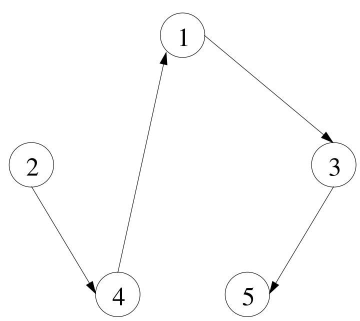
SVOLGIMENTO

Essendo presenti archi di costo negativo (ma non cicli di costo negativo), l'algoritmo più conveniente, tra quelli studiati, dal punto di vista della complessità computazionale è l'algoritmo SPT.L in cui Q è implementata come *fila*, che ha complessità $O(nm)$.

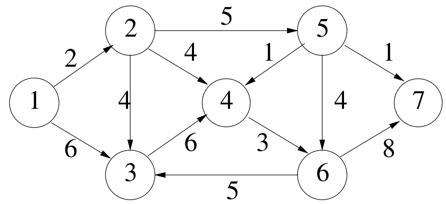
$M = (n-1)c_{max} + 1 = 4 \times 8 + 1 = 33.$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	Q
0		2	*nil*	2	2	2	33	0	33	33	33	$\{2\}$
1	2	2	*nil*	2	2	2	3	0	6	3	8	$\{1,3,4,5\}$
2	1	2	*nil*	1	2	1	3	0	5	3	7	$\{3,4,5\}$
3	3	2	*nil*	1	2	3	3	0	5	3	6	$\{4,5\}$
4	4	4	*nil*	1	2	3	1	0	5	3	6	$\{5,1\}$
5	5	4	*nil*	1	2	3	1	0	5	3	6	$\{1\}$
6	1	4	*nil*	1	2	1	1	0	3	3	5	$\{3,5\}$
7	3	4	*nil*	1	2	3	1	0	3	3	4	$\{5\}$
8	5	4	*nil*	1	2	3	1	0	3	3	4	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura.



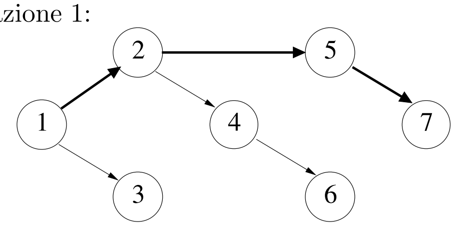
4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad es., (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima ottenuto, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.

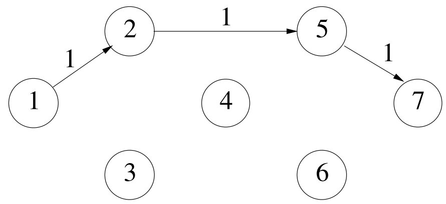


SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione vengono riportati l'albero, il cammino e il flusso finale (omettendo gli archi con flusso nullo).

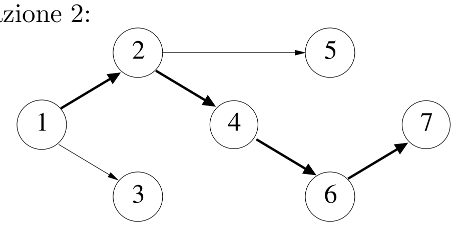
Iterazione 1:

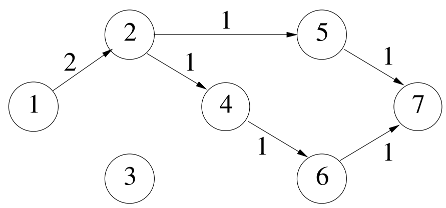




$P = \{1, 2, 5, 7\}$,
$\theta(P, x) = 1$, $v = 1$

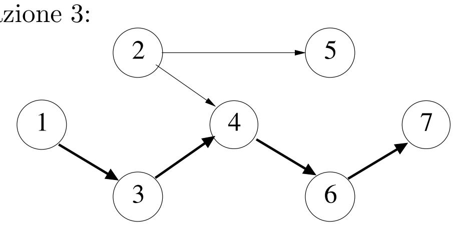
Iterazione 2:

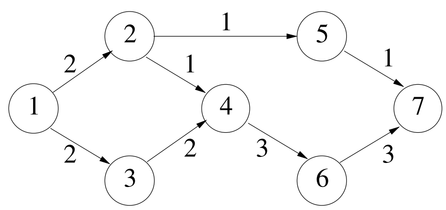




$P = \{1, 2, 4, 6, 7\}$,
$\theta(P, x) = 1$, $v = 2$

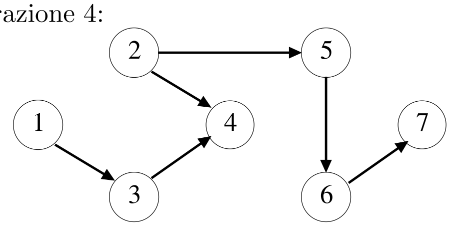
Iterazione 3:

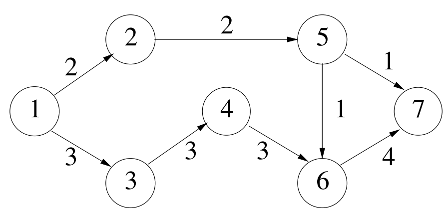




$P = \{1, 3, 4, 6, 7\}$,
$\theta(P, x) = 2$, $v = 4$

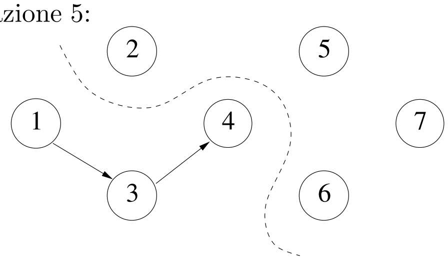
Iterazione 4:





$P = \{1, 3, 4, 2, 5, 6, 7\}$,
$\theta(P, x) = 1$, $v = 5$

Iterazione 5:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo e il taglio $N_s = \{1, 3, 4\}$, $N_t = \{2, 5, 6, 7\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 2 + 3 = 5$.

5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 9y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & + & y_4 & & \\ & 3y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & - & y_4 & = & 4 \\ & y_1 & + & y_2 & & & + & y_4 & = & 3 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0. \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (1, 0, 3, 2)$ è ottima per il problema. Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \begin{array}{l} \max \ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \begin{array}{l} \min \ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

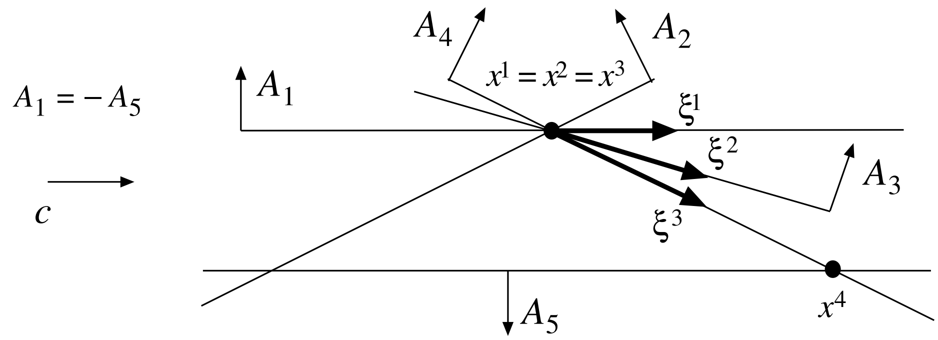
$$(P) \begin{array}{rrcrcl} \max & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \end{array} \qquad (D) \begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 9y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & + & y_4 & & \\ & 3y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & - & y_4 & = & 4 \\ & y_1 & + & y_2 & & & + & y_4 & = & 3 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0. \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{y} = (1, 0, 3, 2)$ è ammissibile per (D). Poiché l'insieme degli indici delle componenti nulle di $\bar{y}$ è $J(\bar{y}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : \bar{y}_i = 0\} = \{2\}$, una soluzione $\bar{x}$ che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $b_i - A_i\bar{x} = 0$ per $i = 1, 3, 4$, ovvero deve risolvere il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & = & 9 \\ x_1 & & & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & = & 1. \end{array} \right.$$

Tale sistema ammette come unica soluzione $\bar{x} = (2, 3)$. Poiché tale soluzione soddisfa anche il secondo vincolo ($A_2\bar{x} = -1 < 1 = b_2$), è ammissibile per (P). Quindi $\bar{y}$ è una soluzione ottima per (D), mentre $\bar{x}$ è l'unica soluzione ottima di (P): infatti $\bar{x}$ è l'unica soluzione ammissibile di (P) che soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\bar{y}$.

6) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL di figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 2\}$, $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_2$, come mostrato in figura a); quindi, $h = 2$. La base è primale degenere, in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 3, 4\}$, ma duale non degenere. Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza ai vincoli 3 e 4, che sono entrambi attivi (ma non in base): quindi $k = \min\{3, 4\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland, eseguendo un cambio di base degenere.

it.2) $B = \{1, 3\}$, $y_1 < 0$ e $y_3 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e A_3, come mostrato in figura b); quindi, $h = 1$. La base è quindi duale non degenere, mentre resta ovviamente primale degenere in quanto $x^2 = x^1$ implica $I(x^2) = I(x^1)$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza al vincolo 4, attivo ma non in base: si esegue quindi un altro cambio di base degenere selezionando $k = 4$.

it.3) $B = \{3, 4\}$, $y_3 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_3$ e A_4, come mostrato in figura c); quindi, $h = 3$. La base è quindi duale non degenere, ma è ovviamente ancora primale degenere. Il massimo passo lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza al vincolo 5, quindi $k = 5$.

it.4) $B = \{4, 5\}$, $y_4 > 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_4 e A_5, come mostrato in figura d); quindi, la base è duale ammissibile e l'algoritmo termina, avendo determinato la soluzione ottima primale x^4. La base è sia primale che duale non degenere.