RICERCA OPERATIVA (a.a. 2006/07)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: ☐ I ☐ SI **Matricola:** **Corso:** ☐ A ☐ B

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & & & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & -2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari si verifichi se la soluzione $\overline{x} = (2, 2)$ è ottima per il problema, giustificando la risposta. In caso affermativo, si determini l'insieme delle soluzioni duali ottime.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P)\quad \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & & & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & -2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 4y_1 & + & 2y_2 & - & 2y_3 & + & 4y_4 & & \\ & y_1 & & & + & y_3 & - & y_4 & = & 1 \\ & y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 & + & y_4 & = & 0 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0. \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (2, 2)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{1, 2, 3\}$. Di conseguenza, una soluzione duale $\bar{y}$, tale che $\bar{y}A = c$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\bar{y}_4 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} y_1 & & & + & y_3 & = & 1 \\ y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 & = & 0 \\ y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Posto $y_3 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $(1-\alpha, 3\alpha-1, \alpha)$. Tali soluzioni hanno componenti non negative per $1/3 \leq \alpha \leq 1$. Pertanto, comunque si scelga α in tale intervallo, la soluzione $\bar{y}_\alpha = (1-\alpha, 3\alpha-1, \alpha, 0)$ è ammissibile per (D). Poiché ciascuna di tali soluzioni soddisfa la condizione degli scarti complementari con $\bar{x}$, $\bar{x}$ è una soluzione ottima per (P) e $\bar{y}_\alpha$ è una soluzione ottima per (D) per ogni $\alpha \in [1/3, 1]$.

Poiché $Y = \{(1-\alpha, 3\alpha-1, \alpha, 0) : 1/3 \leq \alpha \leq 1\}$ è l'insieme di tutte le soluzioni duali ammissibili complementari a $\bar{x}$, soluzione ottima di (P), Y costituisce l'insieme delle soluzioni ottime di (D).

2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & -x_1 & - & 2x_2 & & \\
& x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
& x_1 & & & \leq & 1 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
& -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
& & & x_2 & \leq & 4
\end{array}
$$

Utilizzando il Lemma di Farkas, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (1, 2)$ è ottima per tale problema. In caso negativo, si determini una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}$. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

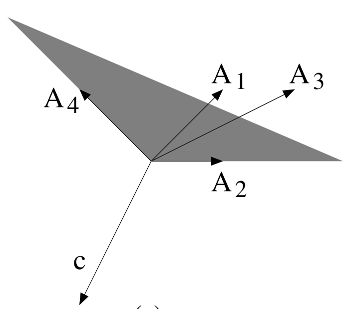
È immediato verificare che $\bar{x} = (1, 2)$ è una soluzione ammissibile. Poiché l'insieme degli indici dei vincoli attivi è $I = I(\bar{x}) = \{1, 2, 3, 4\}$, i sistemi ridotti

$$
(PR) \begin{cases} A_I\xi & \leq & 0 \\ c\xi & > & 0 \end{cases} \qquad\qquad (DR) \begin{cases} y_I A_I & = & c \\ y_I & \geq & 0 \end{cases}
$$

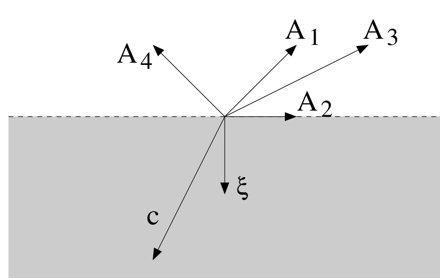
diventano:

$$
(PR) \left\{ \begin{array}{rcrcl}
\xi_1 & + & \xi_2 & \leq & 0 \\
\xi_1 & & & \leq & 0 \\
2\xi_1 & + & \xi_2 & \leq & 0 \\
-\xi_1 & + & \xi_2 & \leq & 0 \\
-\xi_1 & - & 2\xi_2 & > & 0
\end{array} \right.
\qquad\qquad
(DR) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr}
y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & = & -1 \\
y_1 & & & + & y_3 & + & y_4 & = & -2 \\
y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0
\end{array} \right.
$$

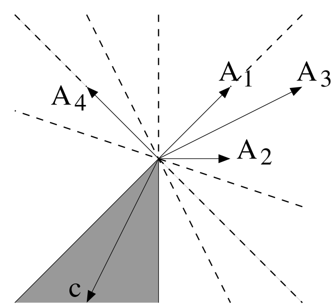
Il sistema (DR) non ammette soluzione in quanto, dalla seconda equazione, risulta $y_1 = -2 - y_3 - y_4$, che non può soddisfare il vincolo di non negatività per valori di y_3 e y_4 non negativi. Ad ulteriore riprova, la figura (a) permette di verificare anche geometricamente l'impossibilità del sistema, ovvero $c \notin \text{cono}\,(\{A_1, A_2, A_3, A_4\})$. Di conseguenza, il Lemma di Farkas garantisce che il sistema (PR) ammette soluzione e pertanto esistono direzioni ammissibili di crescita per $\bar{x}$, che quindi non è una soluzione ottima del problema dato. La direzione $\xi = (0, -1)$ separa c da A_1, A_2, A_3 e A_4: infatti la retta, ad essa ortogonale, divide il piano in due semipiani in uno dei quali giace il vettore c e nell'altro i vettori A_i, $i = 1, ..., 4$, come illustrato in figura (b). Pertanto, $\bar{\xi}$ risolve (PR) ed è quindi una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}$. In figura (c) è evidenziato il cono che individua tutte le soluzioni di (PR), ovvero tutte le direzioni ammissibili di crescita per $\bar{x}$.



(a)



(b)



(c)

3) Si applichi al seguente problema di PL

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & & & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & & & \leq & 4
\end{array}
$$

l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = \min\{1, 2\} = 1 \text{ [regola anticiclo di Bland]}, \quad B(h) = 1$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{3, 4\}$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi, \quad \lambda_3 = 4, \quad \lambda_4 = 4, \quad \bar{\lambda} = \min\{\lambda_i : i \in J\} = \min\{4, 4\} = 4$$

$$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = \min\{3, 4\} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

it.2) $B = \{2, 3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 2, \quad B(h) = 1$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{4\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_4 = 0, \quad k = 4 \text{ [cambio di base degenere]}$$

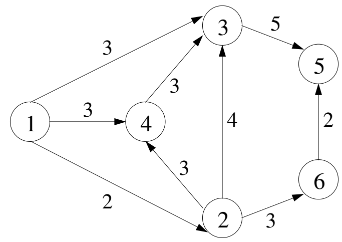
it.3) $B = \{3, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 3, \quad B(h) = 1$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP}$$

Poiché $A_N \xi \leq 0$, il problema primale è superiormente illimitato e quindi il problema duale è vuoto.

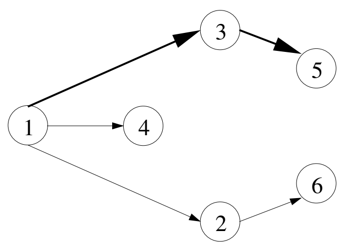
4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 5 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.

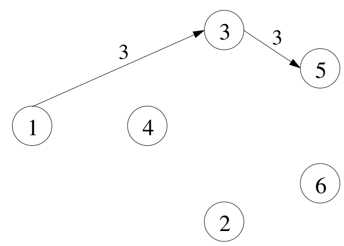


SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

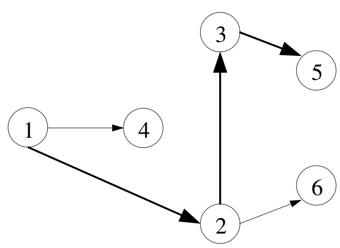
Iterazione 1:

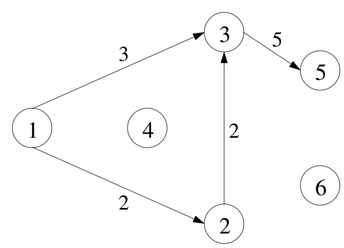




$\theta(P, x) = 3, \quad v = 3$

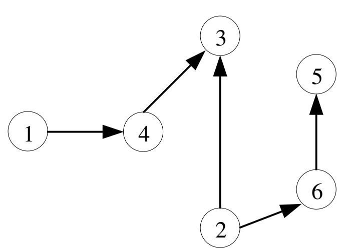
Iterazione 2:

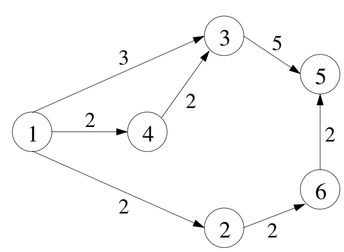




$\theta(P, x) = 2, \quad v = 5$

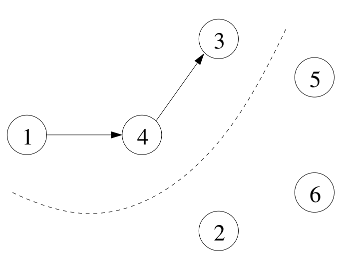
Iterazione 3:





$\theta(P, x) = 2, \quad v = 7$

Iterazione 4:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo ed il taglio $N_s = \{1, 4, 3\}$, $N_t = \{2, 5, 6\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 2 + 5 = 7 = v$.