RICERCA OPERATIVA (a.a. 2006/07)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}$ **Matricola:** **Corso:** $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$

1) La holding finanziaria *Finok* vuole creare un portafoglio azionario per i propri clienti. *Finok* individua n titoli azionari promettenti, ma decide di selezionarne solo q (con $q < n$) per il portafoglio in fase di definizione.

Per selezionare i titoli più rappresentativi, *Finok* stila un indice di "somiglianza" ρ_{ij} tra ogni coppia di titoli disponibili ($\rho_{ij} = 1$ se $i = j$, mentre $0 \leq \rho_{ij} < 1$ altrimenti, $i, j = 1, \ldots, n$), e stabilisce di associare ad ogni titolo j un proprio rappresentante $r(j)$ nel portafoglio in modo tale che $r(j)$ sia il più possibile "simile" a j (un titolo inserito nel portafoglio ha come rappresentante sé stesso). *Finok* definisce quindi come *livello di somiglianza* del portafoglio la somma degli indici di somiglianza $\rho_{jr(j)}$ per $j = 1, \ldots n$, e decide di creare un portafoglio avente il massimo livello di somiglianza.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di selezionare q titoli azionari per il portafoglio, e di associare ad ognuno degli n titoli a disposizione un rappresentante nel portafoglio, in modo tale da massimizzare il livello di somiglianza del portafoglio costituito.

SVOLGIMENTO

Introduciamo n variabili binarie y_i tali che $y_i = 1$ se e solo se il titolo i viene selezionato per il portafoglio in fase di costituzione. Introduciamo inoltre n^2 variabili binarie x_{ij} tali che $x_{ij} = 1$ se e solo se i viene scelto come rappresentante di j.

Esattamente q titoli vengono selezionati per il portafoglio:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = q.$$

Ogni titolo deve avere un proprio rappresentante:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Il rappresentante di un titolo deve far parte del portafoglio:

$$x_{ij} \leq y_i, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Il livello di somiglianza di un portafoglio è esprimibile mediante la funzione lineare

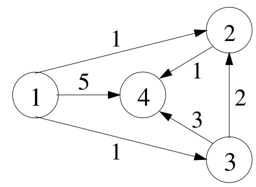
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} x_{ij}.$$

Si osservi che, se un titolo j viene selezionato per il portafoglio, allora in ogni soluzione ottima si avrà necessariamente $x_{jj} = 1$, vale a dire j viene scelto come rappresentante di sé stesso.

La formulazione risultante è quindi:

$$\begin{array}{lll}
\max & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} x_{ij} & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = q & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1, 2, \ldots, n \\
& x_{ij} \leq y_i & i, j = 1, 2, \ldots, n \\
& x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} & i, j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}$$

2) Si formuli in termini di PL il problema di individuare un cammino di costo minimo dal nodo 1 al nodo 4 sul grafo G in figura. Si scrivano le condizioni degli scarti complementari che consentono di caratterizzare l'ottimalità di un cammino da 1 a 4 in G.



SVOLGIMENTO

Il problema di cammino minimo è un particolare problema di flusso di costo minimo. Pertanto, il problema in esame può essere formulato come problema di PL nel modo seguente:

$$
(CM)\qquad
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\min & x_{12} & + & x_{13} & + & 5x_{14} & + & x_{24} & + & 2x_{32} & + & 3x_{34} & & \\
 & -x_{12} & - & x_{13} & - & x_{14} & & & & & & & = & -1 \\
 & x_{12} & & & & & - & x_{24} & + & x_{32} & & & = & 0 \\
 & & + & x_{13} & & & & & - & x_{32} & - & x_{34} & = & 0 \\
 & & & & + & x_{14} & + & x_{24} & & & + & x_{34} & = & 1 \\
 & x_{12}, & & x_{13}, & & x_{14}, & & x_{24}, & & x_{32}, & & x_{34} & \geq & 0
\end{array}
$$

Tale problema ha la forma del problema (D) della coppia asimmetrica di problemi duali. Il suo problema duale è quindi:

$$
(DCM)\qquad
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & -y_1 & & & & & + & y_4 & & \\
 & -y_1 & + & y_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & -y_1 & & & + & y_3 & & & \leq & 1 \\
 & -y_1 & & & & & + & y_4 & \leq & 5 \\
 & & - & y_2 & & & + & y_4 & \leq & 1 \\
 & & + & y_2 & - & y_3 & & & \leq & 2 \\
 & & & & - & y_3 & + & y_4 & \leq & 3
\end{array}
$$

Considerando la generica coppia asimmetrica di problemi duali

$$
(P)\ \begin{array}{l} \max\ cy \\ Ay \leq b \end{array}
\qquad\qquad
(D)\ \begin{array}{l} \min\ xb \\ xA = c \\ x \geq 0 \end{array}
$$

il Teorema degli scarti complementari afferma che, date due soluzioni $\bar{y}$ e $\bar{x}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{x}(b - A\bar{y}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

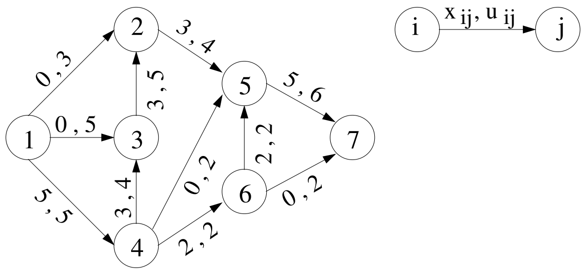
$$\bar{x}_i(b_i - A_i\bar{y}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Il Teorema degli scarti complementari, come sopra enunciato, ha validità anche per (CM) e (DCM). Quindi, dato un flusso unitario $\bar{x}$ ammissibile per (CM), ovvero un cammino dal nodo 1 al nodo 4 in G, e data una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (DCM), $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime se e solo se:

$$
\begin{array}{l}
\bar{x}_{12}(1 + \bar{y}_1 - \bar{y}_2) = 0, \\
\bar{x}_{13}(1 + \bar{y}_1 - \bar{y}_3) = 0, \\
\bar{x}_{14}(5 + \bar{y}_1 - \bar{y}_4) = 0, \\
\bar{x}_{24}(1 + \bar{y}_2 - \bar{y}_4) = 0, \\
\bar{x}_{32}(2 + \bar{y}_3 - \bar{y}_2) = 0, \\
\bar{x}_{34}(3 + \bar{y}_3 - \bar{y}_4) = 0.
\end{array}
$$

Si osservi che una soluzione ammissibile per (DCM) costituisce un vettore di etichette che verificano le condizioni di Bellman. Inoltre, gli scarti complementari richiedono che la condizione di Bellman sia verificata dalle etichette (ovvero dalla soluzione ammissibile per (DCM)) come uguaglianza per ogni arco (i, j) facente parte del cammino considerato (in quanto $\bar{x}_{ij} > 0$).

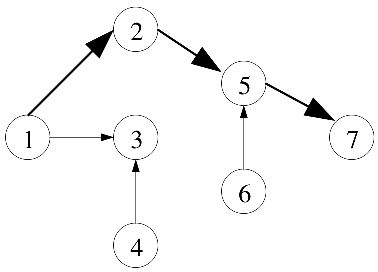
3) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato in figura di valore $v = 5$. Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.

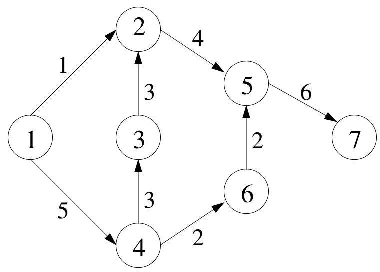


SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

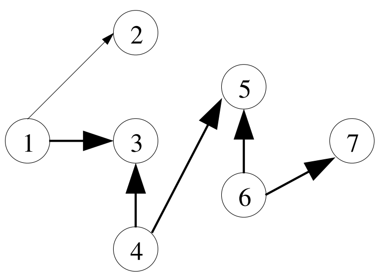
Iterazione 1:

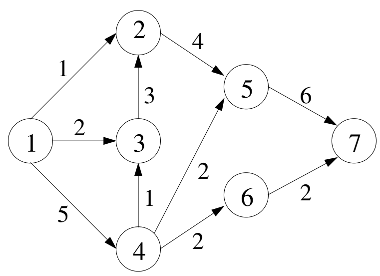




$\theta(P, x) = 1, \quad v = 6$

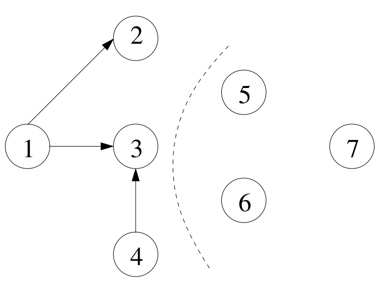
Iterazione 2:





$\theta(P, x) = 2, \quad v = 8$

Iterazione 3:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo ed il taglio $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$, $N_t = \{5, 6, 7\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 4 + 2 + 2 = 8 = v$.

4) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & 2y_1 & + & 6y_2 & + & 3y_3 & + & y_4 & & \\
 & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 2 \\
 & y_1 & - & y_2 & & & + & y_4 & = & 1 \\
 & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (0, 0, 1, 1)$ è ottima per il problema. Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \begin{array}{l} \max \; cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min \; yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 1
\end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & 2y_1 & + & 6y_2 & + & 3y_3 & + & y_4 & & \\
 & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 2 \\
 & y_1 & - & y_2 & & & + & y_4 & = & 1 \\
 & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0
\end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{y} = (0, 0, 1, 1)$ è ammissibile per (D). L'insieme degli indici delle variabili duali positive in $\bar{y}$ è $J(\bar{y}) = \{j \in \{1, \ldots, m\} : \bar{y}_j > 0\} = \{3, 4\}$. Di conseguenza, una soluzione primale $\bar{x}$ che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $b_i - A_i\bar{x} = 0$ per $i = 3, 4$, ovvero il terzo ed il quarto vincolo devono essere attivi. Pertanto, $\bar{x}$ deve risolvere il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \end{array} \right.$$

Posto $x_1 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $x(\alpha) = (\alpha, 1 - \alpha, 3 - \alpha)$. Tale soluzione è ammissibile per (P) soltanto quando $\alpha = 2$. Infatti, il primo vincolo è rispettato per $\alpha \geq 2$, mentre il secondo vincolo è soddisfatto per $\alpha \leq 2$. Poiché $x(2) = (2, -1, 1)$ soddisfa la condizione degli scarti complementari con $\bar{y}$ ed è ammissibile, $\bar{y}$ è una soluzione ottima per (D). Si osservi che, essendo $x(2)$ l'unica soluzione primale ammissibile complementare alla soluzione ottima duale $\bar{y}$, $x(2)$ è l'unica soluzione ottima di (P).

5) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & & & & \\ & & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1,3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1,3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \;\; \bar{y}_N = 0, \;\; \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{2,4\} = 2 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \;\; \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i/\eta_i : i \in B, \; \eta_i > 0\} = \min\{1/2, 1\} = 1/2,$$

$$h = \min\{i \in B : \eta_i > 0, \; \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\} = 1.$$

it. 2) $B = \{2,3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \;\; \bar{y}_N = 0, \;\; \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; k = 4,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \; \bar{\theta} = \min\{1,1\} = 1, \; h = \min\{2,3\} = 2 \text{ [regola anticiclo di Bland]}.$$

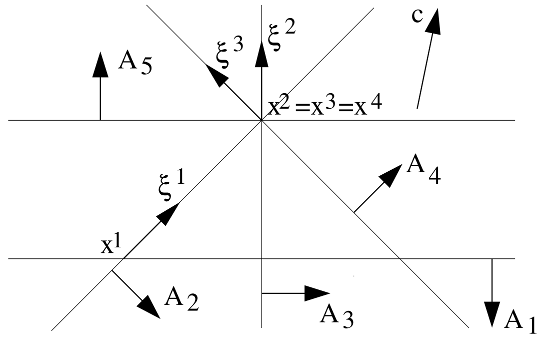
it. 3) $B = \{3,4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \;\; \bar{y}_N = 0, \;\; \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; \text{STOP}.$$

$B = \{3,4\}$ è una base ottima: $\bar{x} = (0,2)$ è una soluzione ottima per il problema primale, mentre $\bar{y} = (0,0,0,1,0)$ è una soluzione ottima per il problema duale.

6) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 2\}$, $y_1 < 0$ e $y_2 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e A_2, come mostrato in figura (a); quindi, risulta $h = 1$. La base è sia primale ($I(x^1) = B$) che duale non degenere ($y_1, y_2 \neq 0$). Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza ai vincoli 3, 4 e 5: quindi $k = \min\{3, 4, 5\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland.

it.2) $B = \{2, 3\}$, $y_2 < 0$ e $y_3 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_2$ e A_3, come mostrato in figura (b); quindi, risulta $h = 2$. La base è primale degenere ($I(x^2) = \{2, 3, 4, 5\}$), ma duale non degenere ($y_2, y_3 \neq 0$). Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza ai vincoli 4 e 5, attivi ma non in base: si esegue quindi un cambio di base degenere selezionando $k = \min\{4, 5\} = 4$ per la regola anticiclo di Bland.

it.3) $B = \{3, 4\}$, $y_3 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_3$ e A_4, come mostrato in figura (c); quindi, risulta $h = 3$. La base è duale non degenere ($y_3, y_4 \neq 0$), ma è primale degenere ($I(x^3) = \{2, 3, 4, 5\}$). Il massimo passo lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza al vincolo 5, attivo ma non in base: si esegue quindi un altro cambio di base degenere selezionando $k = 5$.

it.4) $B = \{4, 5\}$, $y_4 > 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_4 e A_5, come mostrato in figura (d); quindi, la base è duale ammissibile e l'algoritmo termina, avendo determinato la soluzione ottima primale x^4. La base è primale degenere ($I(x^4) = \{2, 3, 4, 5\}$) ma duale non degenere ($y_4, y_5 \neq 0$).