RICERCA OPERATIVA (a.a. 2006/07)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}$ **Matricola:** **Corso:** $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$

1) Si formuli, in termini di P.L.I., il problema di minimizzare il costo mensile di stoccaggio $c(x)$ di un'azienda, che nel caso in cui la quantità x di merce stoccata nei magazzini sia compresa tra 0 e 30 tonnellate è definito dalla funzione lineare $2x$, ed invece vale $x + 40$ nel caso in cui il numero x di tonnellate stoccate sia maggiore di 30 e minore o uguale della capacità totale dei magazzini, che è pari a 100 tonnellate. Per esigenze di produzione l'azienda necessita di stoccare almeno L tonnellate al mese. Si dimostri la correttezza della formulazione proposta.

SVOLGIMENTO

Il costo di stoccaggio dell'azienda è definito come:

$$c(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \le x \le 30, \\ x + 40, & \text{se } 30 < x \le 100. \end{cases}$$

$c(x)$ è una funzione lineare a tratti, con due tratti, da minimizzare. Il problema può essere formulato introducendo una variabile decisionale y che distingua il caso in cui il numero x di tonnellate in magazzino appartenga al primo intervallo, vale a dire $0 \le x \le 30$ ($y = 0$), dal caso in cui il numero di tonnellate appartenga all'intervallo $30 \le x \le 100$ ($y = 1$). Per distingure inoltre la variabilità di x nel primo e nel secondo intervallo introduciamo una variabile z_1, che descrive la quantità di stock x nel primo intervallo, ed una variabile z_2, che descrive la quantità di stock x nel secondo intervallo. Introduciamo pertanto i vincoli $0 \le z_1 \le 30(1 - y)$ e $30y \le z_2 \le 100y$. Essendo mutuamente esclusivi, il legame tra x, z_1 e z_2 è espresso da $x = z_1 + z_2$. Bisogna inoltre imporre che la quantità stoccata sia maggiore o uguale a L: $z_1+z_2 \ge L$. La funzione obiettivo, da minimizzare, è $g(z_1, z_2, y) = 2z_1+z_2+40y$. Si ottiene quindi la seguente formulazione:

$$\begin{array}{lll} (P) & \min & 2z_1 + z_2 + 40y \\ & & 0 \le z_1 \le 30(1 - y) \\ & & 30y \le z_2 \le 100y \\ & & z_1 + z_2 \ge L \\ & & y \in \{0, 1\} \end{array}$$

Dimostrazione di correttezza

Quando $y = 0$ si ha $0 \le z_1 \le 30$ mentre $z_2 = 0$: la quantità x di merce in magazzino varia quindi nel primo intervallo ($x = z_1$). Il corrispondente valore della funzione obiettivo è $g(z_1, 0, 0) = 2z_1$, vale a dire $2x$, in accordo con $c(x)$.

Quando invece $y = 1$ si ha $z_1 = 0$ mentre $30 \le z_2 \le 100$: la quantità x di merce in magazzino varia quindi nel secondo intervallo ($x = z_2$). In corrispondenza di tali valori di x la funzione obiettivo assume l'andamento lineare $g(0, z_2, 1) = z_2 + 40$, vale a dire $x + 40$, in accordo con $c(x)$ per $x > 30$. Osserviamo che il punto di discontinuità $x = 30$ è rappresentato in (P) in modo duplice:

- $(z_1, z_2, y) = (30, 0, 0)$: in tal caso $g(30, 0, 0) = c(30) = 60$;
- $(z_1, z_2, y) = (0, 30, 1)$: in tal caso $g(0, 30, 1) = 70 > c(30) = 60$;

$(z_1, z_2, y) = (0, 30, 1)$ non è pertanto una rappresentazione corretta di $x = 30$. Poiché $g(z_1, z_2, y)$ viene minimizzata e $g(0, 30, 1) = 70 > g(30, 0, 0) = 60$, la rappresentazione $(z_1, z_2, y) = (0, 30, 1)$ non può costituire la soluzione ottima, e quindi l'ambiguità della rappresentazione di $x = 30$ è risolta a livello di ottimizzazione. Quindi, (P) è una rappresentazione corretta del problema.

2) Dopo la caduta del governo, il Grande Leader del Partito Azzurro sta attentamente pianificando la rivincita elettorale per la Grande Coalizione, che comprende anche gli alleati del Partito Nero. Il territorio nazionale è diviso in n collegi uninominali, in cui vince un seggio il candidato che ottiene il maggior numero di voti. Il Partito ha una lista di n personalità disposte a candidarsi, ed i sondaggisti del Grande Leader gli assicurano che la Coalizione vincerà in tutti i collegi uninominali, indipendentemente dal candidato prescelto. Il numero di voti che un candidato prende è anche rilevante ai fini della quota proporzionale: per ciascun collegio i e personalità j si conosce il numero di voti v_{ij} che il candidato prenderebbe se si presentasse in quel collegio, ed il partito riceverà un ulteriore seggio ogni δ voti ottenuti dai propri candidati eletti. Infine, esiste un premio di maggioranza su base regionale: gli n collegi sono raggruppati in 21 regioni R_h, $h = 1, \ldots, 21$, ed il partito che conquista la maggioranza dei collegi nella regione h ha diritto ad altri r_h deputati.

Il Grande Leader deve decidere la spartizione dei collegi. Gli accordi col Partito Nero stabiliscono che non più del 60% dei candidati della Coalizione potrà appartenere al Partito Azzurro, e che il Partito Azzurro non dovrà vincere il premio di maggioranza in più di 13 regioni su 21. Per evitare qualsiasi problema di ribaltone, il Grande Leader vuole determinare in quali collegi presentare un candidato del suo partito, ed eventualmente quale, in modo che il numero totale di deputati ottenuti sia massimo; se il numero totale di voti ottenuti non è multiplo di δ nella massimizzazione si valuta anche la parte frazionaria. Si formuli come *PLI* il problema corrispondente.

SVOLGIMENTO

Introducendo le variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il candidato } i \text{ si presenta nel collegio } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, n,$$

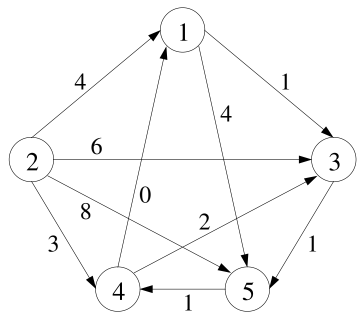
$$m_h = \begin{cases} 1 & \text{se il Partito Azzurro ottiene il premio di maggioranza nella regione } h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad h = 1, \ldots, 21,$$

il problema può essere formulato come:

$$\begin{array}{lll}
\max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_{ij}\Big)/\delta + \sum_{h=1}^{21} r_h m_h & \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 & i = 1, \ldots, n \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 & j = 1, \ldots, n \\
& \displaystyle\sum_{j \in R_h}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq [(|R_h| + 1)/2] m_h & h = 1, \ldots, 21 \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 0.6n & \\
& \displaystyle\sum_{h=1}^{21} m_h \leq 13 & \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, \; r_h \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, n, \; h = 1, \ldots, 21
\end{array}$$

La funzione obiettivo massimizza il numero totale di deputati, dato dalla somma di quelli provenienti dai collegi uninominali (primo termine), quelli provenienti dalla quota proporzionale (secondo termine) e quelli provenienti dal premio di maggioranza (terzo termine); il secondo termine può essere frazionario. I primi due blocchi di vincoli garantiscono che nessuna personalità si presenti in più di un collegio, e che in ciascun collegio ci sia al più un candidato del Partito Azzurro. Il terzo blocco di vincoli, insieme al fatto che il coefficiente di m_h nella funzione obiettivo è positivo, assicura che la variabile m_h ha valore 1 se e solo se il Partito Azzurro ha presentato il proprio candidato in più della metà dei seggi della regione h, e ha quindi ottenuto il premio di maggioranza. Gli ultimi due vincoli garantiscono, rispettivamente, che il numero di candidati del Partito Azzurro sia ai più il 60% del totale, e che il Partito Azzurro ottenga il premio di maggioranza in non più di 13 regioni.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione trovata è unica? Giustificare la risposta.



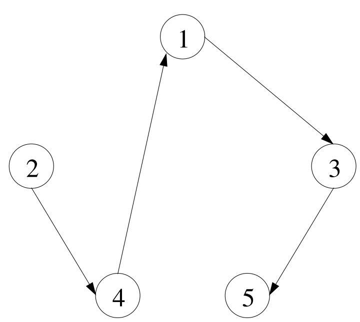
SVOLGIMENTO

Non essendo presenti archi di costo negativo e non essendo il grafo aciclico, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale, tra quelli studiati, è l'algoritmo di Dijkstra, cioè l'algoritmo SPT.S in cui l'insieme Q è implementato come una coda di priorità, che ha complessità in tempo $O(n^2)$.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 4 \times 8 + 1 = 33.$

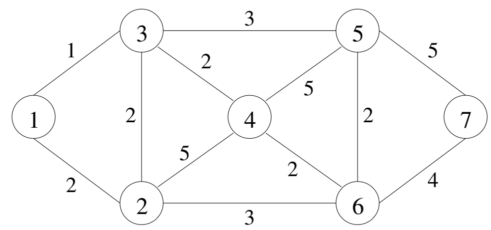
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	Q
0		2	*nil*	2	2	2	33	0	33	33	33	$\{2\}$
1	2	2	*nil*	2	2	2	4	0	6	3	8	$\{1,3,4,5\}$
2	4	4	*nil*	4	2	2	3	0	5	3	8	$\{1,3,5\}$
3	1	4	*nil*	1	2	1	3	0	4	3	7	$\{3,5\}$
4	3	4	*nil*	1	2	3	3	0	4	3	5	$\{5\}$
5	5	4	*nil*	1	2	3	3	0	4	3	5	$\emptyset$

L'albero trovato A_T è mostrato in figura.



La soluzione trovata è unica in quanto tutti gli archi non appartenenti alla soluzione individuata soddisfano la condizione di Bellman come disuguaglianza, ovvero $d[i] + c_{ij} > d[j]$ per ogni arco $(i,j) \notin A_T$.

4) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame; quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo $T = (N, A_T)$.

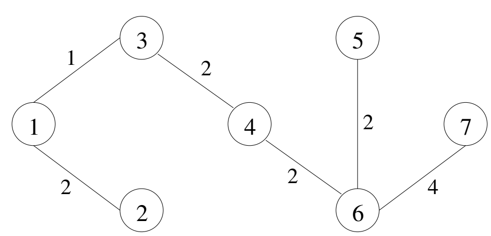


SVOLGIMENTO

Si consideri il seguente ordinamento degli archi per costo non decrescente:
$(1,3), (1,2), (2,3), (3,4), (4,6), (5,6), (2,6), (3,5), (6,7), (2,4), (4,5), (5,7)$.

	arco	operazione	taglio	ciclo
it.1)	$(1,3)$	inserzione	$(\{1\}, \{2,3,4,5,6,7\})$	
it.2)	$(1,2)$	inserzione	$(\{2\}, \{1,3,4,5,6,7\})$	
it.3)	$(2,3)$	cancellazione		$(1,2,3)$
it.4)	$(3,4)$	inserzione	$(\{4\}, \{1,2,3,5,6,7\})$	
it.5)	$(4,6)$	inserzione	$(\{6\}, \{1,2,3,4,5,7\})$	
it.6)	$(5,6)$	inserzione	$(\{5\}, \{1,2,3,4,6,7\})$	
it.7)	$(2,6)$	cancellazione		$(2,6,4,3,1)$
it.8)	$(3,5)$	cancellazione		$(3,5,6,4)$
it.9)	$(6,7)$	inserzione	$(\{7\}, \{1,2,3,4,5,6\})$	

L'algoritmo termina all'iterazione 9, con l'albero T in figura, in quanto $|A_T| = n - 1 = 6$.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 11 \\ & & + & x_2 & \leq & 5 \\ & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (3, 5)$ è ottima per il problema. Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 11 \\ & & + & x_2 & \leq & 5 \\ & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{lrcrcrcrcr} \min & 8y_1 & + & 11y_2 & + & 5y_3 & + & 5y_4 & & \\ & y_1 & + & 2y_2 & & & + & 3y_4 & = & 1 \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & - & y_4 & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0. \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (3, 5)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{1, 2, 3\}$. Di conseguenza una soluzione duale $\bar{y}$, tale che $\bar{y}A = c$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\bar{y}_4 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1 & + & 2y_2 & & & = & 1 \\ y_1 & + & y_2 & + & y_3 & = & 2 \\ y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Posto $y_2 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $y_\alpha = (1 - 2\alpha, \alpha, 1 + \alpha)$. Tali soluzioni hanno componenti non negative per $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Pertanto, per tali valori di α l'insieme di soluzioni $\bar{y}_\alpha = (y_\alpha, 0)$ è ammissibile per (D). Poiché ciascuna $\bar{y}_\alpha$ soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$, dal teorema segue che $\bar{x}$ è una soluzione ottima per (P).

6) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & & & & \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 2\},\ A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \end{bmatrix},\quad y_N = 0,\quad y = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = \min\{1, 2\} = 1 \ \ \text{[regola anticiclo di Bland]}\ ,\quad B(h) = 1,$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix},\quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix},\quad J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{3, 4, 5\},$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi,\quad \lambda_3 = 2,\quad \lambda_4 = 2,\quad \lambda_5 = 10,\quad \bar{\lambda} = \min\{\lambda_i \ : \ i \in J\} = \min\{2, 2, 10\} = 2,$$

$$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = \min\{3, 4\} = 3 \ \ \text{[regola anticiclo di Bland]}$$

it.2) $B = \{2, 3\},\quad A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\quad x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix},\quad y_N = 0,\quad y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad h = 2,\quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{4, 5\},\quad \lambda_4 = 0,\quad \lambda_5 = 4,\quad \bar{\lambda} = \min\{0, 4\} = 0,\quad k = 4 \ \ \text{[cambio di base degenere]}$$

it.3) $B = \{3, 4\},\quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix},\quad y_N = 0,\quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad h = 3,\quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\quad J = \{5\},\quad \bar{\lambda} = \lambda_5 = 4,\quad k = 5$$

it.4) $B = \{4, 5\},\quad A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix},$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},\quad y_N = 0,\quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \text{STOP}$$

$B = \{4, 5\}$ è una base ottima: $x = (4, 2)$ è una soluzione ottima per il problema primale, mentre $y = (0, 0, 0, 0, 1)$ è una soluzione ottima per il problema duale.