RICERCA OPERATIVA (a.a. 2007/08)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}$ **Matricola:** **Corso:** $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$

1) Dopo avere finalmente superato l'esame di Ricerca Operativa, Tommaso è pronto per partire in vacanza. Tommaso sceglie n oggetti che desidera portare con sè, e si pone il problema di mattere tali oggetti nel suo set di m valigie, tutte indentiche tra loro. Individua tre sottoinsiemi di oggetti critici per il trasporto, vale a dire l'insieme S delle paia scarpe, l'insieme A degli abiti facilmente spiegazzabili, e l'insieme I degli oggetti per l'igiene personale. Per ovvie ragioni decide che nessun paio di scarpe possa essere inserito in valigia insieme ad un oggetto di igiene personale, e neppure insieme ad un abito spiegazzabile.

Sapendo che l'oggetto i ha peso p_i, e che ogni valigia è in grado di contenere oggetti per un peso complessivo pari a P, si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere come mettere gli oggetti nelle valigie minimizzando il numero di valigie utilizzate, nel rispetto dei vincoli di peso e dei vincoli di compatibilità tra oggetti.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le variabili di assegnamento x_{ij} tali che:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'oggetto } i \text{ vien inserito nella valigia } j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, .., n, \quad j = 1, .., m.$$

Introduciamo inoltre le variabili binarie y_j tali che:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se si utilizza la valigia } j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, ..m.$$

Una formulazione del problema è la seguente:

$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} y_j \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, .., n \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \leq P y_j \quad j = 1, ..m \\ & x_{ij} + x_{hj} \leq 1 \qquad i \in S, \quad h \in I, \quad j = 1, ..m \\ & x_{ij} + x_{hj} \leq 1 \qquad i \in S, \quad h \in A, \quad j = 1, ..m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, ..n, \quad j = 1, ..m \\ & y_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, ..m \end{array}$$

Il primo blocco di vincoli rappresenta i vincoli di semiassegnamento (degli oggetti alle valigie). Il secondo blocco di vincoli garantisce il soddisfacimento dei vincoli di peso. Inoltre assicura che, se un oggetto viene assegnato ad una valigia j, questa venga utilizzata (e quindi $y_j = 1$). Il terzo blocco di vincoli costituisce i vincoli di compatibilità tra le scarpe, gli abiti spiegazzabili e gli oggetti per l'igiene personale. Infine la funzione obiettivo, da minimizzare, rappresenta il numero totale di valigie utilizzate.

2) Si considerino un grafo $G = (N, A)$ con assegnata una capacità positiva u_{ij} ad ogni arco $(i, j) \in A$ e due nodi $s, t \in N$. Riformulare il problema di Programmazione Matematica

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\in A} u_{ij} \max\{0, \pi_i - \pi_j\} \\ & \pi_s = 1, \quad \pi_t = 0 \\ & \pi_i \in \{0, 1\} \qquad\qquad i \in N \end{aligned}$$

in termini di Programmazione Lineare Intera, giustificando la risposta. Si illustri, inoltre, perché tale problema costituisce una formulazione del problema del taglio, che separa s da t, di capacità minima.

SVOLGIMENTO

La funzione obiettivo del problema non è lineare in quanto i termini $\max\{0, \pi_i - \pi_j\}$ non sono funzioni lineari di π_i e π_j. È possibile riformulare il problema in termini di *PLI*, utilizzando variabili quantitative y_{ij} che individuino approssimazioni superiori delle quantità $\max\{0, \pi_i - \pi_j\}$ tramite i vincoli lineari

$$y_{ij} \geq \pi_i - \pi_j, \quad y_{ij} \geq 0.$$

Pertanto, una formulazione equivalente del problema è

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\in A} u_{ij} y_{ij} \\ & \pi_s = 1, \quad \pi_t = 0 \\ & y_{ij} \geq \pi_i - \pi_j \qquad (i, j) \in A \\ & y_{ij} \geq 0 \qquad\qquad\quad (i, j) \in A \\ & \pi_i \in \{0, 1\} \qquad\quad i \in N. \end{aligned}$$

Si osservi che ogni soluzione ottima $(\bar\pi, \bar y)$ soddisfa la condizione $\bar y_{ij} = \max\{0, \bar\pi_i - \bar\pi_j\}$ per ogni $(i, j) \in A$.

Un taglio (N_s, N_t), che separa s da t, è univocamente individuato da un vettore $\pi \in \{0, 1\}^n$ tramite la posizione:

$$\pi_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in N_s \\ 0 & \text{se } i \in N_t. \end{cases}$$

Conseguentemente, abbiamo anche

$$\max\{0, \pi_i - \pi_j\} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \in A^+(N_s, N_t) \\ 0 & \text{se } (i, j) \notin A^+(N_s, N_t) \end{cases}$$

dove $A^+(N_s, N_t) := \{\ (i, j) \in A\ :\ i \in N_s,\ j \in N_t\ \}$. Poiché la capacita di un taglio che separa s da t è data da

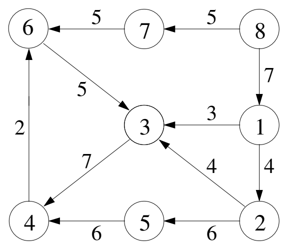
$$u(N_s, N_t) := \sum_{(i,j)\in A^+(N_s,N_t)} u_{ij},$$

la funzione obiettivo (originale)

$$\sum_{(i,j)\in A} u_{ij} \max\{0, \pi_i - \pi_j\}$$

rappresenta proprio tale capacità. Pertanto, una soluzione ottima del modello individua un taglio, che separa s da t, di capacita' minima.

3) Si individui un flusso massimo dal nodo 8 al nodo 4 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.



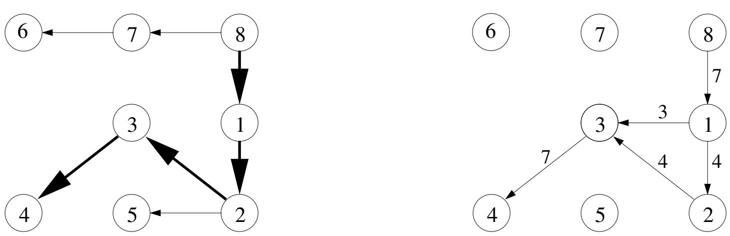
SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

Iterazione 1:

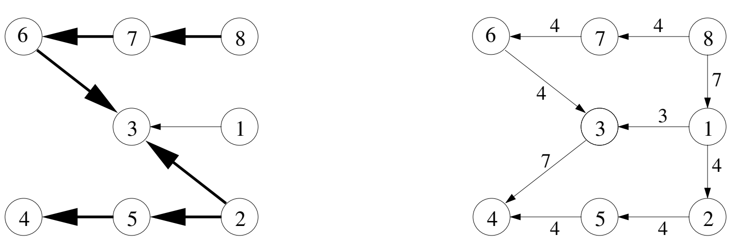
$\theta(P, x) = 3, \quad v = 3$

Iterazione 2:



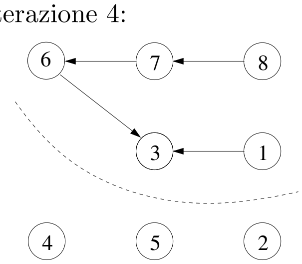
$\theta(P, x) = 4, \quad v = 7$

Iterazione 3:



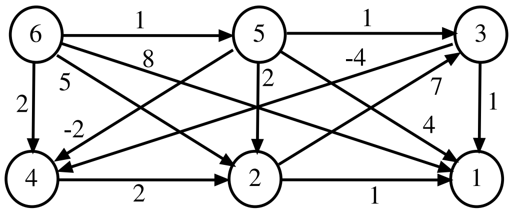
$\theta(P, x) = 4, \quad v = 11$

Iterazione 4:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo ed inoltre il taglio $N_s = \{1, 3, 6, 7, 8\}$, $N_t = \{2, 4, 5\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 7 + 4 = 11$.

4) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 6 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



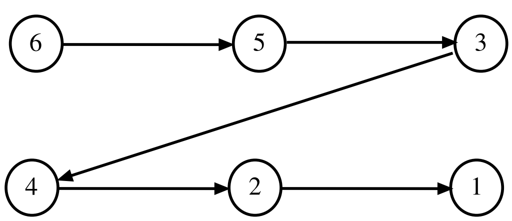
SVOLGIMENTO

Essendo presenti archi di costo negativo (ma non cicli di costo negativo), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.L, in cui Q è implementata come *fila*, che ha complessità in tempo $O(nm)$.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 5 \times 8 + 1 = 41.$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	Q
0		6	6	6	6	6	*nil*	41	41	41	41	41	0	$\{6\}$
1	6	6	6	6	6	6	*nil*	8	5	41	2	1	0	$\{1,2,4,5\}$
2	1	6	6	6	6	6	*nil*	8	5	41	2	1	0	$\{2,4,5\}$
3	2	2	6	2	6	6	*nil*	6	5	12	2	1	0	$\{4,5,1,3\}$
4	4	2	4	2	6	6	*nil*	6	4	12	2	1	0	$\{5,1,3,2\}$
5	5	5	5	5	5	6	*nil*	5	3	2	-1	1	0	$\{1,3,2,4\}$
6	1	5	5	5	5	6	*nil*	5	3	2	-1	1	0	$\{3,2,4\}$
7	3	3	5	5	3	6	*nil*	3	3	2	-2	1	0	$\{2,4,1\}$
8	2	3	5	5	3	6	*nil*	3	3	2	-2	1	0	$\{4,1\}$
9	4	3	4	5	3	6	*nil*	3	0	2	-2	1	0	$\{1,2\}$
10	1	3	4	5	3	6	*nil*	3	0	2	-2	1	0	$\{2\}$
11	2	2	4	5	3	6	*nil*	1	0	2	-2	1	0	$\{1\}$
12	1	2	4	5	3	6	*nil*	1	0	2	-2	1	0	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & - & 2x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \leq & 1 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 0.
\end{array}
$$

Si verifichi se le soluzioni $\bar{x} = (1, 1)$ e $\bar{x}' = (-1, 0)$ sono ottime per tale problema. In caso negativo, si determini una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}$ ed una per $\bar{x}'$. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

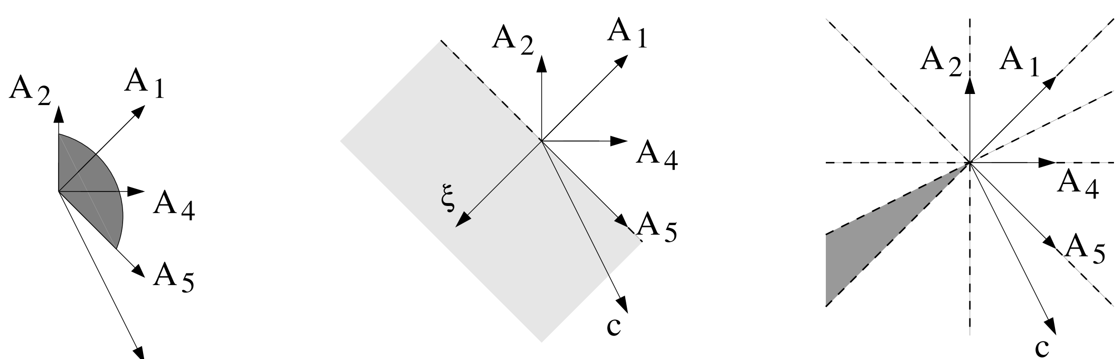
È immediato verificare che $\bar{x} = (1, 1)$ e $\bar{x}' = (-1, 0)$ sono soluzioni ammissibili. Poiché l'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}'$ è $I(\bar{x}') = \emptyset$, $\bar{x}'$ è un punto interno alla regione ammissibile. Pertanto, $\bar{x}'$ non è una soluzione ottima e qualsiasi direzione ξ' tale che $c\xi' = \xi'_1 - 2\xi'_2 > 0$ è una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}'$, ad esempio $\xi' = (1, 0)$. Essendo $c\bar{x} = c\bar{x}' = -1$, anche $\bar{x}$ non è una soluzione ottima. Poichè l'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I = I(\bar{x}') = \{1, 2, 4, 5\}$, i sistemi ridotti

$$
(PR) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} A_I\xi & \leq & 0 \\ c\xi & > & 0 \end{array} \right. \qquad\qquad (DR) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y_I A_I & = & c \\ y_I & \geq & 0 \end{array} \right.
$$

diventano:

$$
(PR) \quad \left\{ \begin{array}{lcrcl}
\xi_1 & + & \xi_2 & \leq & 0 \\
 & & \xi_2 & \leq & 0 \\
\xi_1 & & & \leq & 0 \\
\xi_1 & - & \xi_2 & \leq & 0 \\
\xi_1 & - & 2\xi_2 & > & 0
\end{array} \right.
\qquad\qquad
(DR) \quad \left\{ \begin{array}{lclclclcr}
y_1 & & & + & y_4 & + & y_5 & = & 1 \\
y_1 & + & y_2 & & & - & y_5 & = & -2 \\
y_1, & & y_2, & & y_4 & & y_5 & \geq & 0
\end{array} \right.
$$

Poiché $\bar{x}$ non è ottima, il sistema (PR) ammette soluzione. Ad ulteriore riprova, è immediato verificare che, come garantito dal lemma di Farkas, il sistema (DR) non ammette soluzione: sommando le due equazioni si ottiene $2y_1 + y_2 + y_4 = -1$, che non è compatibile con i vincoli di non negatività $y_1, y_2, y_4 \geq 0$ (la figura (a) permette di verificare anche geometricamente l'impossibilità del sistema, ovvero $c \notin \text{cono}(\{A_1, A_2, A_4, A_5\})$). La direzione $\xi = (-1, -1)$ separa c da A_1, A_2, A_4 e A_5: infatti la retta, ad essa ortogonale, divide il piano in due semipiani in uno dei quali giace il vettore c e nell'altro i vettori A_i, $i = 1, 2, 4, 5$, come illustrato in figura (b). Pertanto, ξ risolve (PR) ed è quindi una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}$. In figura (c) è evidenziato il cono che individua tutte le soluzioni di (PR), ovvero tutte le direzioni ammissibili di crescita per $\bar{x}$.



(a) (b) (c)

6) Si applichi al seguente problema di PL

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & & & & \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \end{array}$$

l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1,2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1,2\},\ A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix},\ x = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \end{bmatrix},\quad y_N = 0,\quad y = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = \min\{1,2\} = 1 \text{ [regola anticiclo di Bland]},\quad B(h) = 1,\quad \xi = -A_B^{-1}u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix},$$

$$A_N\xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix},\quad J = \{i \in N : A_i\xi > 0\} = \{3,4,5\},\quad \lambda_i = (b_i - A_ix)/A_i\xi,$$

$$\lambda_3 = 6,\quad \lambda_4 = 9,\quad \lambda_5 = 10,\quad \bar\lambda = \min\{\lambda_i\ :\ i \in J\} = \min\{6,9,10\} = 6,\ k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar\lambda\} = 3$$

it.2) $B = \{2,3\},\quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix},\quad y_N = 0,\quad y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad h = 2,\quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad A_N\xi = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$J = \{4,5\}, \lambda_4 = 2,\quad \lambda_5 = 2,\quad \bar\lambda = 2,\quad k = \min\{4,5\} = 4 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

it.3) $B = \{3,4\},\quad A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix},$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix},\quad y_N = 0,\quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad h = 3,\quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad A_N\xi = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\quad J = \{5\},\quad \bar\lambda = \lambda_5 = 0 \quad \text{[cambio di base degenere]},\quad k = 5$$

it.4) $B = \{4,5\},\quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix},$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix},\quad y_N = 0,\quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\quad h = 4,\quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad A_N\xi = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix},\quad \textit{STOP.}$$

Il problema primale è superiormente illimitato, e di conseguenza il problema duale è vuoto.