RICERCA OPERATIVA (a.a. 2007/08)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}$ **Matricola:** **Corso:** $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$

1) Si consideri una rete di trasporto intermodale, descritta in termini di un grafo orientato $G = (N, A)$. Sia u_{ij} la capacità del collegamento $(i, j) \in A$. Sia inoltre v la quantità di merce che deve essere inviata lungo G dal nodo sorgente s al nodo destinazione t.

L'insieme A dei collegamenti della rete è partizionato in k sottoinsiemi, A_1, A_2, ..., A_k: gli archi appartenenti ad uno stesso sottoinsieme A_h modellano collegamenti della rete caratterizzati dalla stessa modalità di trasporto, quali tratte stradali, linee ferroviarie, rotte navali, ecc.

Si formuli in termini di *PLI* il problema di inviare la quantità di merce v da s a t lungo G utilizzando il minor numero possibile di modalità di trasporto distinte.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le variabili di flusso x_{ij} che denotano la quantità di merce inviata lungo ciascun collegamento $(i, j) \in A$. Introduciamo inoltre le variabili seguenti binarie:

$$y_h = \begin{cases} 1 & \text{se viene utilizzata la modalità di trasporto } h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad h = 1, \dots, k$$

Una formulazione del problema è la seguente:

$$\begin{array}{lll} \min & \displaystyle\sum_{h=1}^{k} y_h & \\ & \displaystyle\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -v & \text{se } i = s \\ v & \text{se } i = t \\ 0 & \text{se } i \neq s, t \end{cases} & i \in N \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} y_h & (i,j) \in A_h, h = 1, \dots, k \\ & y_h \in \{0, 1\} & h = 1, \dots, k \end{array}$$

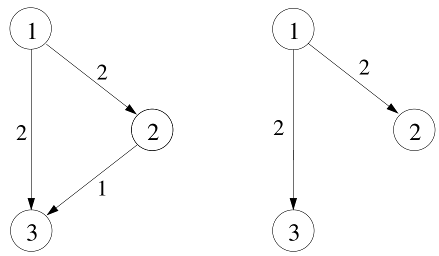
Il primo blocco di vincoli (vincoli di conservazione di flusso) garantisce l'invio di una quantità di merce v da s a t. Il secondo blocco di vincoli è costituito da vincoli di capacità congiuntamente a vincoli logici. In particolare tali vincoli garantiscono che, se viene usata la modalità di trasporto h (vale a dire se viene inviata merce utilizzando almeno un arco appartenente all'insieme A_h), allora la corrispondente variabile y_h è forzata ad assumere il valore 1. Infine la funzione obiettivo, da minimizzare, conteggia il numero totale di modalità di trasporto utilizzate per l'invio.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false, giustificando le risposte:

1. Ogni albero dei cammini minimi contiene sempre almeno uno degli archi di costo minimo;
2. Ogni albero di copertura di costo minimo contiene sempre almeno uno degli archi di costo minimo.

SVOLGIMENTO

La prima affermazione è falsa, come mostrato dall'esempio riportato in figura.

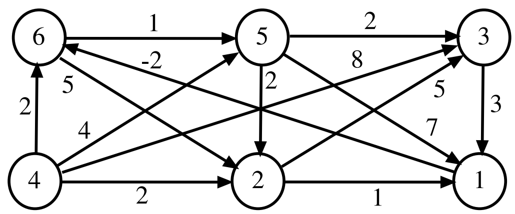


(a) (b)

Considerando il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 di figura (a), l'unico arco di costo minimo è $(2, 3)$, che non appartiene all'unico albero dei cammini minimi (figura (b)).

La seconda affermazione è vera. Supponiamo, per assurdo, che un albero di copertura di costo minimo T non contenga alcuno degli archi di costo minimo. Aggiungendo uno di tali archi all'albero si crea un ciclo: gli archi del ciclo appartenenti all'albero hanno costo maggiore dell'arco appena aggiunto; rimuovendone uno qualsiasi, si ottiene un altro albero di copertura T' che ha costo minore di T, il che contraddice l'ipotesi che T sia un albero di copertura di costo minimo.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 4 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.



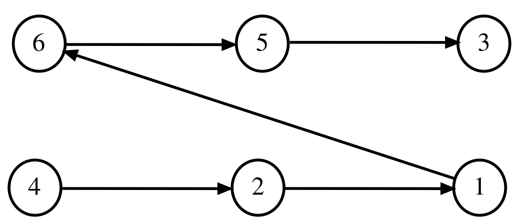
SVOLGIMENTO

Essendo presenti archi di costo negativo (ma non cicli di costo negativo), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.L, in cui Q è implementata come *fila*, che ha complessità in tempo $O(nm)$.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 5 \times 8 + 1 = 41.$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	Q
0		4	4	4	*nil*	4	4	41	41	41	0	41	41	$\{4\}$
1	4	4	4	4	*nil*	4	4	41	2	8	0	4	2	$\{2,3,5,6\}$
2	2	2	4	2	*nil*	4	4	3	2	7	0	4	2	$\{3,5,6,1\}$
3	3	2	4	2	*nil*	4	4	3	2	7	0	4	2	$\{5,6,1\}$
4	5	2	4	5	*nil*	4	4	3	2	6	0	4	2	$\{6,1,3\}$
5	6	2	4	5	*nil*	6	4	3	2	6	0	3	2	$\{1,3,5\}$
6	1	2	4	5	*nil*	6	1	3	2	6	0	3	1	$\{3,5,6\}$
7	3	2	4	5	*nil*	6	1	3	2	6	0	3	1	$\{5,6\}$
8	5	2	4	5	*nil*	6	1	3	2	5	0	3	1	$\{6,3\}$
9	6	2	4	5	*nil*	6	1	3	2	5	0	2	1	$\{3,5\}$
10	3	2	4	5	*nil*	6	1	3	2	5	0	2	1	$\{5\}$
11	5	2	4	5	*nil*	6	1	3	2	4	0	2	1	$\{3\}$
12	3	2	4	5	*nil*	6	1	3	2	4	0	2	1	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura.



4) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (2, 4)$ è ottima per il problema. Esiste una soluzione $\bar{y}$ ottima per il problema duale tale che $\bar{y}_1 = 2$? Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P)\quad \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & 6y_1 & + & 8y_2 & + & 5y_3 & + & 4y_4 & & \\ & y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0. \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (2, 4)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{1, 2, 4\}$. Di conseguenza una soluzione duale $\bar{y}$, tale che $\bar{y}A = c$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\bar{y}_3 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1 & + & 2y_2 & & & = & 1 \\ y_1 & + & y_2 & + & y_4 & = & 1 \\ y_1, & & y_2, & & y_4 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Posto $y_2 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $(1 - 2\alpha, \alpha, \alpha)$. Tali soluzioni hanno componenti non negative per $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Pertanto, per tali valori di α l'insieme di soluzioni $\bar{y}(\alpha) = (1 - 2\alpha, \alpha, 0, \alpha)$ è ammissibile per (D). Poiché ciascuna $\bar{y}(\alpha)$ soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$, dal teorema segue che $\bar{x}$ è una soluzione ottima di (P) e $\bar{y}(\alpha)$ è una soluzione ottima di (D) per ogni $\alpha \in [0, 1/2]$.

Poiché ogni soluzione ottima del problema duale (D) deve essere complementare a $\bar{x}$, abbiamo inoltre che $\{\bar{y}(\alpha) \ : \ 0 \leq \alpha \leq 1/2\}$ è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D). Affinché risulti $\bar{y}_1(\alpha) = 2$, deve essere $\alpha = -1/2$; pertanto, non può esistere alcuna soluzione duale ottima la cui prima componente valga 2.

5) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{2, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{1, 4\} = 1 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\} = \min\{1, 3/4\} = 3/4,$$

$$h = \min\{i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\} = 3.$$

it. 2) $B = \{1, 2\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ -2 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad k = 4,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}, \ \bar{\theta} = \min\{1, 1\} = 1,\ h = \min\{1, 2\} = 1 \text{ [regola anticiclo di Bland]}.$$

it. 3) $B = \{2, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$,

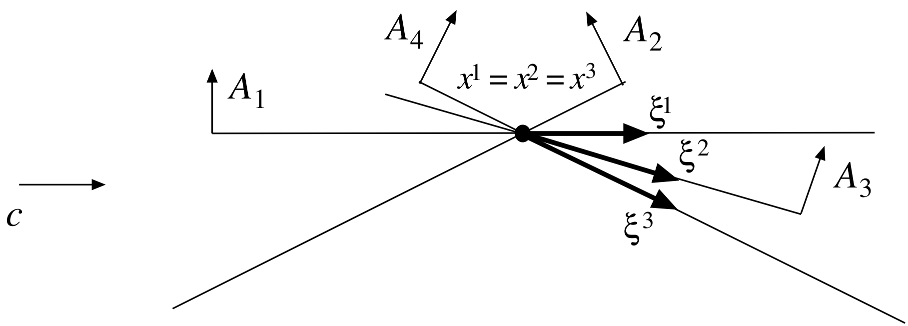
$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad k = 5,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

Poiché $\eta_B \leq 0$, il problema duale è inferiormente illimitato e il problema primale è vuoto.

6) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL di figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 2\}$, $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_2$, come mostrato in figura a); quindi, $h = 2$. La base è primale degenere, in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 3, 4\}$, ma duale non degenere. Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza ai vincoli 3 e 4, che sono entrambi attivi (ma non in base): quindi $k = \min\{3, 4\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland, eseguendo un cambio di base degenere.

it.2) $B = \{1, 3\}$, $y_1 < 0$ e $y_3 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e A_3, come mostrato in figura b); quindi, $h = 1$. La base è quindi duale non degenere, mentre resta ovviamente primale degenere in quanto $x^2 = x^1$ implica $I(x^2) = I(x^1)$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza al vincolo 4, attivo ma non in base: si esegue quindi un altro cambio di base degenere selezionando $k = 4$.

it.3) $B = \{3, 4\}$, $y_3 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_3$ e A_4, come mostrato in figura c); quindi, $h = 3$. La base è quindi duale non degenere, ma è ovviamente ancora primale degenere. Poiché non esistono gradienti dei vincoli fuori base, che abbiano prodotto scalare positivo con ξ^3 (infatti risulta sia $A_1\xi^3 < 0$ sia $A_2\xi^3 < 0$) l'algoritmo termina avendo determinato che il primale è superiormente illimitato, e di conseguenza il duale è vuoto.

a) *b*) *c*)