RICERCA OPERATIVA (a.a. 2007/08)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: I SI **Matricola:** **Corso:** A B

1) Si consideri il seguente modello di Programmazione Matematica:

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ & \max\{\ 2x_1 + 3x_2 \ : \ x_1 + x_2 \le 10,\ 2x_1 + x_2 \le 12,\ x_1, x_2 \ge 0\} \le v \\ & v \ge 4 \end{aligned}$$

Si formuli il problema in termini di Programmazione Lineare, giustificando la risposta (suggerimento: si utilizzi il Teorema forte della dualità per eliminare il problema di PL interno al modello, sostituendolo mediante un insieme di vincoli lineari).

SVOLGIMENTO

Il modello di Programmazione Matematica proposto presenta un modello interno di Programmazione Lineare:

$$(\mathrm{P}) \quad \max\{\ 2x_1 + 3x_2 \ : \ x_1 + x_2 \le 10,\ 2x_1 + x_2 \le 12,\ x_1, x_2 \ge 0\}.$$

Poiché la regione ammissibile di (P) è un poliedro non vuoto e limitato, (P) ammette ottimo finito. Per il Teorema forte della dualità, il valore ottimo di (P) è quindi uguale al valore ottimo del suo problema duale, che risulta essere:

$$(\mathrm{D}) \quad \min\{\ 10y_1 + 12y_2 \ : \ y_1 + 2y_2 \ge 2,\ y_1 + y_2 \ge 3,\ y_1, y_2 \ge 0\}.$$

È allora possibile sostituire (D) a (P) nel modello di Programmazione Matematica proposto:

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ & \min\{\ 10y_1 + 12y_2 \ : \ y_1 + 2y_2 \ge 2,\ y_1 + y_2 \ge 3,\ y_1, y_2 \ge 0\} \le v \\ & v \ge 4 \end{aligned}$$

Il valore minimo che assume la funzione $10y_1 + 12y_2$ nella regione ammissibile del problema duale (D) è minore od uguale a v se e solo se la funzione assume un valore minore od uguale a v almeno in un punto di tale poliedro. Quindi, l'operatore "min" può essere rimosso, ottenendo il seguente modello equivalente di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ & 10y_1 + 12y_2 \le v \\ & y_1 + 2y_2 \ge 2 \\ & y_1 + y_2 \ge 3 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \\ & v \ge 4 \end{aligned}$$

2) Teucri ed Achei si battono furiosamente sotto le mura di Ilio. Guidati da Ares ed Afrodite, i figli di Priamo stanno avendo la meglio, e sono arrivati vicino alle nere navi dei Danai; se riuscissero a bruciarle, per gli Argivi non ci sarebbe più ritorno sul mare colore del vino. Per questo Atena, dea della saggezza ed alleata dei Greci, spinge il re Agamennone ad organizzare un contrattacco con i cocchi per fermare l'avanzata nemica. Il figlio di Atreo ha a disposizione n Eroi (E), n Cocchi (C) trainati da focose pariglie di cavalli e n Aurighi (A) per condurli; per ogni tripla (e, a, c) con $e \in E$, $c \in C$ e $a \in A$, i vaticini della dea con lo sguardo scintillante forniscono la misura $f_{e,c,a}$ della forza che avrebbe in battaglia l'eroe "e" se fosse montato sul cocchio "c" ed accompagnato dall'auriga "a". Il re di Micene chiede aiuto all'astuto Ulisse per determinare le n combinazioni di eroi, cocchi ed aurighi che hanno la forza totale (somma delle forze delle triple prescelte) maggiore. Aiutate Odisseo a compiere il volere del Fato scrivendo il modello di PLI del corrispondente problema.

SVOLGIMENTO

Introduciamo per ogni $e \in E$, $c \in C$ e $a \in A$ le variabili binarie

$$x_{e,c,a} = \begin{cases} 1 & \text{se l'eroe "}e\text{" viene mandato in battaglia montato sul cocchio "}c\text{" e accompagnato dall'auriga "}a\text{"} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Una formulazione del problema è la seguente:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{e \in E} \sum_{c \in C} \sum_{a \in A} f_{e,c,a}\, x_{e,c,a} & \\ & \sum_{c \in C} \sum_{a \in A} x_{e,c,a} = 1 & e \in E \\ & \sum_{e \in E} \sum_{a \in A} x_{e,c,a} = 1 & c \in C \\ & \sum_{e \in E} \sum_{c \in C} x_{e,c,a} = 1 & a \in A \\ & x_{e,c,a} \in \{0,1\} & e \in E\ ,\ c \in C\ ,\ a \in A \end{array}$$

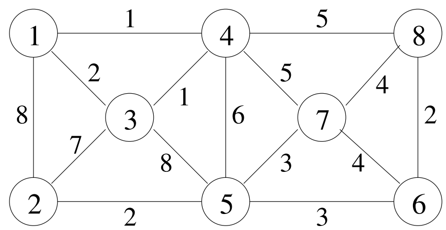
Il primo blocco di vincoli garantisce che ciascun eroe $e \in E$ sia accompagnato da una sola coppia $(c, a) \in C \times A$. Il secondo e terzo blocco di vincoli hanno l'analogo significato per ciascun cocchio $c \in C$ e ciascun auriga $a \in A$. I tre blocchi di vincoli insieme garantiscono che ciascuno dei possibili eroi, cocchi ed aurighi sia coinvolto in una ed una sola tripla. Infine la funzione obiettivo, da massimizzare, rappresenta la forza totale delle n triple prescelte.

Una formulazione alternativa è quella in cui si introducono due insiemi di variabili di assegnamento $x_{e,c}$ e $x_{c,a}$, con l'ovvio significato, e poi si rimpiazzano i vincoli del problema (lasciando inalterata la funzione obiettivo) come segue:

$$\begin{array}{ll} \sum_{c \in C} x_{e,c} = 1 & e \in E \\ \sum_{e \in E} x_{e,c} = 1 & c \in C \\ \sum_{c \in C} x_{c,a} = 1 & a \in A \\ \sum_{a \in A} x_{c,a} = 1 & c \in C \\ x_{e,c,a} \leq x_{e,c} & e \in E\ ,\ c \in C\ ,\ a \in A \\ x_{e,c,a} \leq x_{c,a} & e \in E\ ,\ c \in C\ ,\ a \in A \\ x_{e,c} \in \{0,1\} & e \in E\ ,\ c \in C \\ x_{c,a} \in \{0,1\} & c \in C\ ,\ a \in A \end{array}$$

Si osservi che la seconda formulazione ha più variabili e più vincoli della precedente, anche se non sono necessari i vincoli di integralità sulle variabili $x_{e,c,a}$: se $x_{e,c} = x_{c,a} = 1$, essendo un problema di massimo $x_{e,c,a}$ assume il valore 1, mentre se almeno una delle due vale 0 allora $x_{e,c,a}$ assume il valore 0.

3) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame; quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo $T = (N, A_T)$. Tale soluzione ottima è unica? Giustificare la risposta.

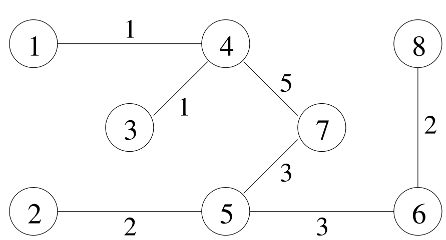


SVOLGIMENTO

Si consideri il seguente ordinamento degli archi per costo non decrescente:
$(1,4),(4,3),(1,3),(2,5),(6,8),(5,6),(5,7),(6,7),(7,8),(4,7),(4,8),(4,5),(2,3),(1,2),(3,5)$.

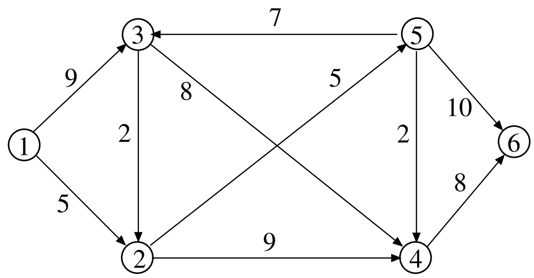
	arco	operazione	taglio	ciclo
it.1)	$(1,4)$	inserzione	$(\{1\},\{2,3,4,5,6,7,8\})$	
it.2)	$(4,3)$	inserzione	$(\{3\},\{1,2,4,5,6,7,8\})$	
it.3)	$(1,3)$	cancellazione		$(1,3,4)$
it.4)	$(2,5)$	inserzione	$(\{2\},\{1,3,4,5,6,7,8\})$	
it.5)	$(6,8)$	inserzione	$(\{8\},\{1,2,3,4,5,6,7\})$	
it.6)	$(5,6)$	inserzione	$(\{6,8\},\{1,2,3,4,5,7\})$	
it.7)	$(5,7)$	inserzione	$(\{7\},\{1,2,3,4,5,6,8\})$	
it.8)	$(6,7)$	cancellazione		$(6,7,5)$
it.9)	$(7,8)$	cancellazione		$(7,8,6,5)$
it.10)	$(4,7)$	inserzione	$(\{1,3,4\},\{2,5,6,7,8\})$	

L'algoritmo termina all'iterazione 10, con l'albero T in figura, in quanto $|A_T| = n - 1 = 7$.



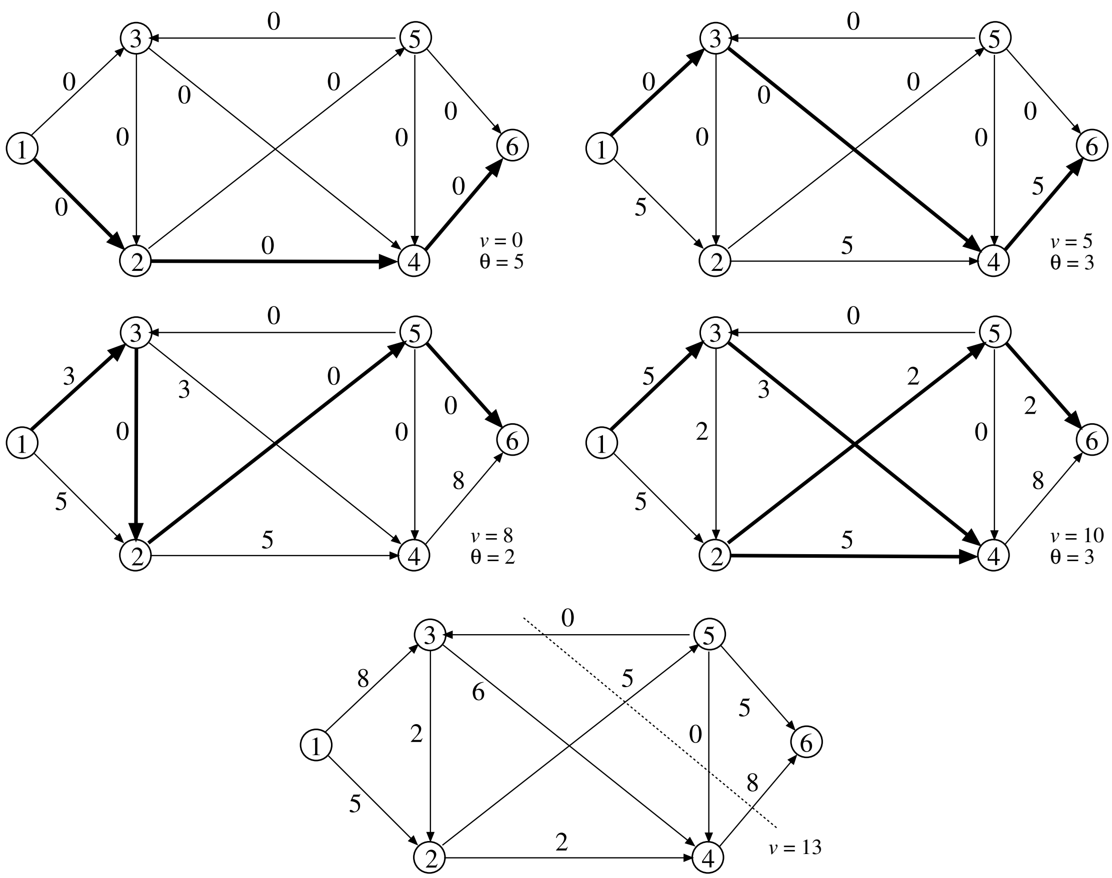
La soluzione individuata non è l'unica soluzione ottima: una soluzione alternativa può essere ottenuta sostituendo l'arco $(4,7)$ con l'arco $(4,8)$ di ugual costo, il che accadrebbe all'ultima iterazione se si fosse scelto il corrispondente ordinamento degli archi.

4) Si risolva il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 relativamente all'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Ad ogni iterazione indicare il flusso x, il suo valore v, il cammino aumentante utilizzato e la sua capacità θ. Al termine indicare il taglio di capacità minima determinato dall'algoritmo con la relativa capacità. Durante la procedura di visita si esaminino gli archi della stella uscente per ordine di nodo testa crescente.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono mostrate in figura, dall'alto in basso e da sinistra a destra; il numero sugli archi è il valore del flusso. Gli archi evidenziati indicano il cammino aumentante selezionato. Nella figura corrispondente all'ultima iterazione, la linea tratteggiata indica il taglio $(N_s, N_t) = (\{1,2,3,4\},\{5,6\})$ di capacità minima $u(N_s, N_t) = u_{25} + u_{46} = 5 + 8 = 13$, pari al valore $v = 13$ del flusso individuato dall'algoritmo.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
\min & -2y_1 & & & + & 2y_3 & + & 3y_4 & - & y_5 & & \\
 & y_1 & - & y_2 & - & y_3 & + & 2y_4 & - & y_5 & = & 3 \\
 & -3y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & + & y_4 & + & y_5 & = & -2 \\
 & 3y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & - & 2y_5 & = & 2 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0.
\end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (1, 0, 0, 1, 0)$ è ottima per il problema. Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P)\ \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D)\ \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

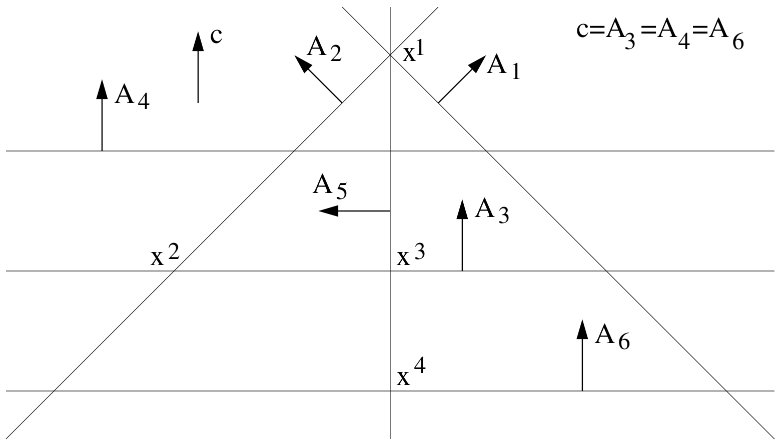
$$(P)\ \begin{array}{rrcrcrcr}
\max & 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & & \\
 & x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq & -2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1
\end{array}
\qquad
(D)\ \begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
\min & -2y_1 & & & + & 2y_3 & + & 3y_4 & - & y_5 & & \\
 & y_1 & - & y_2 & - & y_3 & + & 2y_4 & - & y_5 & = & 3 \\
 & -3y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & + & y_4 & + & y_5 & = & -2 \\
 & 3y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & - & 2y_5 & = & 2 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0.
\end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{y} = (1, 0, 0, 1, 0)$ è ammissibile per (D). L'insieme degli indici delle variabili duali positive in $\bar{y}$ è $J(\bar{y}) = \{j \in \{1, \ldots, m\} : \bar{y}_j > 0\} = \{1, 4\}$. Di conseguenza, una soluzione primale $\bar{x}$ che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $b_i - A_i\bar{x} = 0$ per $i = 1, 4$, ovvero il primo ed il quarto vincolo devono essere attivi. Pertanto, $\bar{x}$ deve risolvere il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \\
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3.
\end{array} \right.$$

Posto $x_3 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $x(\alpha) = (1, 1 + \alpha, \alpha)$. Nessuna di queste soluzioni è ammissibile per (P): sia il secondo che il terzo vincolo sono rispettati per $\alpha \leq 0$ mentre il quinto vincolo è rispettato per $\alpha \geq 1$. Perciò, non esiste alcuna soluzione ammissibile per il problema (P) che verifichi gli scarti complementari con $\bar{y}$, che pertanto non è una soluzione ottima per (D).

6) Si risolva graficamente il problema di PL indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



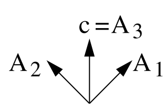
SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$, x^1 viola i vincoli 3, 4 e 6 da cui $k = \min\{3, 4, 6\} = 3$ (regola anticiclo di Bland), $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ (in quanto $c \in$ cono(A_1, A_2) come mostrato in figura (a)). La base è primale degenere in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 5\}$, ma duale non degenere. Poiché $A_3 = c$, risultano $\eta_1 = y_1 > 0$, $\eta_2 = y_2 > 0$, $\bar{\theta} = y_1/\eta_1 = y_2/\eta_2 = 1$, $h = \min\{1, 2\} = 1$ (regola anticiclo di Bland).

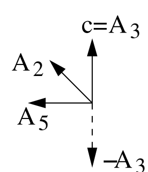
it. 2) $B = \{2, 3\}$, x^2 viola i vincoli 5 e 6 da cui $k = \min\{5, 6\} = 5$ (regola anticiclo di Bland), $y_2 = 0$, $y_3 = 1$ (in quanto $c = A_3$). La base è primale non degenere, ma duale degenere in quanto $y_2 = 0$. Poiché $A_5 \in$ cono$(A_2, -A_3)$ (come mostrato in figura (b)), risultano $\eta_2 > 0$, $\eta_3 < 0$, $\bar{\theta} = y_2/\eta_2 = 0$, $h = 2$.

it. 3) $B = \{3, 5\}$, x^3 viola il vincolo 6 da cui $k = 6$, $y_3 = 1$, $y_5 = 0$ (in quanto $c = A_3$). La base è primale non degenere, ma duale degenere in quanto $y_5 = 0$. Poiché $A_6 = A_3$, risultano $\eta_3 = 1$, $\eta_5 = 0$, $\bar{\theta} = y_3/\eta_3 = 1$, $h = 3$.

it. 4) $B = \{5, 6\}$, x^4 è una soluzione ammissibile per il problema primale e quindi ottima. La base è primale non degenere, ma duale degenere in quanto $y_5 = 0$ (infatti $c = A_6$ garantisce $y_5 = 0$ e $y_6 = 1$).



(a)



(b)