RICERCA OPERATIVA (a.a. 2008/09)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}$ **Matricola:** **Corso:** $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$

1) Il fondo di investimento G&V ha a disposizione W Euro, che desidera investire utilizzando n titoli azionari disponibili. Sia c_i il costo di acquisto di un'azione del titolo i e sia inoltre r_i una stima del rendimento futuro di ciascuna azione del titolo i (un rendimento negativo denota una perdita). G&V intende formare un portafoglio, stabilendo su quali titoli investire, e quante azioni acquistare per ogni titolo selezionato. Nel caso vengano acquistate azioni del titolo i, i regolamenti finanziari in vigore impongono che il numero di azioni acquistate sia compreso tra una soglia minima l_i ed una soglia massima u_i.

Per misurare il rischio legato alla propria strategia di investimento, G&V decide di basarsi sui rendimenti unitari effettivi di ogni titolo in m periodi temporali passati: per ogni titolo i e per ogni periodo t è noto il rendimento unitario r_i^t del titolo i nel periodo t, e si può così valutare il *rendimento critico* di un portafoglio, vale a dire il minimo tra i rendimenti che il portafoglio avrebbe realizzato in ciascuno dei periodi passati.

Aiutate G&V a scegliere il proprio investimento, formulando in termini di PLI il problema di formare un portafoglio che soddisfi i vincoli relativi al numero delle azioni acquistabili, che garantisca un rendimento futuro (stimato) pari almeno al 7% di W, e che massimizzi il rendimento critico.

SVOLGIMENTO

Per ogni $i = 1, ..., n$, introduciamo una variabile binaria

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se si investe sul titolo } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Introduciamo inoltre una variabile quantitativa x_i che denota il numero di azioni del titolo i acquistate da G&V. Introduciamo infine una variabile ausiliaria v che rappresenta una valutazione inferiore del rendimento critico di un portafoglio. Una formulazione del problema è la seguente:

$$\begin{array}{lll} \max & v & \\ & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq W & \\ & \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq 7W/100 & \\ & \sum_{i=1}^{n} r_i^t x_i \geq v & t = 1, ..., m \\ & y_i l_i \leq x_i \leq y_i u_i & i = 1, ...n \\ & y_i \in \{0, 1\} & i = 1, ..., n \end{array}$$

Il primo vincolo è un vincolo di budget, relativo al capitale disponibile per l'investimento. Il secondo vincolo garantisce che il rendimento futuro del portafoglio sia pari almeno al 7% di W. Il successivo blocco di vincoli garantisce che v sia una valutazione inferiore del rendimento critico del portafoglio. Poiché la funzione obiettivo massimizza v, ciò garantisce che il portafoglio selezionato abbia rendimento critico massimo tra i portafogli ammissibili. Infine, i gruppi di vincoli successivi assicurano che, se si investe sul titolo i, allora il numero x_i di azioni acquistate sia compreso nell'intervallo $[l_i, u_i]$, mentre se non si investe su tale titolo allora risulta $x_i = 0$.

2) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & 3x_2 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & \le & 4 \\ & & & x_2 & \le & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & \le & 0 \\ & x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \end{array}$$

Data la soluzione ammissibile $\bar{x} = (1, 2)$, si verifichi per via algebrica se le direzioni $\xi_1 = (-1, -1)$ e $\xi_2 = (-2, 1)$ siano ammissibili per $\bar{x}$ e/o di crescita. Nel caso di direzioni ammissibili, si fornisca anche il massimo passo di spostamento lungo la direzione, motivando la risposta (si ricordi che, data una soluzione ammissibile $\bar{x}$, la direzione ξ è ammissibile per $\bar{x}$ se e solo se è possibile effettuare un passo di spostamento $\lambda > 0$ lungo ξ a partire da $\bar{x}$ mantenendo l'ammissibilità).

SVOLGIMENTO

Per controllare l'ammissibilità di una direzione è conveniente considerare separatamente i vincoli di disuguaglianza da quelli di uguaglianza. A questo scopo introduciamo sia l'insieme degli indici dei vincoli di disuguaglianza, $J := \{i \ : \ A_i x \le b_i\}$, sia l'insieme degli indici dei vincoli di uguaglianza, $K := \{i \ : \ A_i x = b_i\}$. Data una soluzione $\bar{x}$ è utile conoscere anche quali vincoli di disuguaglianza sono attivi in $\bar{x}$: sia $I(\bar{x}) := \{i \in J \ : \ A_i \bar{x} = b_i\}$. Nel caso in esame abbiamo $J = \{1, 2, 3\}$, $K = \{4\}$ e $I = I(\bar{x}) = \{1\}$.

1) Affinché $\bar{x}(\lambda) := \bar{x} + \lambda \xi_1$ soddisfi i vincoli di disuguaglianza, basta limitarci a considerare i vincoli attivi in $\bar{x}$ (in quanto gli altri sono sicuramente soddisfatti per $\lambda > 0$ sufficientemente piccolo). Tali vincoli risultano soddisfatti per ogni $\lambda > 0$ in quanto

$$A_I \bar{x}(\lambda) = A_I \bar{x} + \lambda A_I \xi_1 = 4 + \lambda \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4 - 3\lambda \le 4 = b_I.$$

Per quanto riguarda il vincolo di uguaglianza abbiamo:

$$A_K \bar{x}(\lambda) = A_K \bar{x} + \lambda A_K \xi_1 = 5 + \lambda \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 5 - 3\lambda.$$

Poiché $b_K = 5$, abbiamo $A_k \bar{x}(\lambda) = b_K$ se e solo se $\lambda = 0$. Quindi, ξ_1 non è una direzione ammissibile per $\bar{x}$.

Poiché il prodotto scalare

$$c\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -4$$

è negativo, ξ_1 non è una direzione di crescita.

2) $\bar{x}(\lambda) := \bar{x} + \lambda \xi_2$ soddisfa i vincoli di disuguaglianza attivi in $\bar{x}$ per ogni $\lambda > 0$ in quanto

$$A_I \bar{x}(\lambda) = A_I \bar{x} + \lambda A_I \xi_1 = 4 + \lambda \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 - 3\lambda \le 4 = b_I,$$

e soddisfa il vincolo di uguaglianza in quanto

$$A_K \bar{x}(\lambda) = A_K \bar{x} + \lambda A_K \xi_1 = 5 + \lambda \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 = b_K.$$

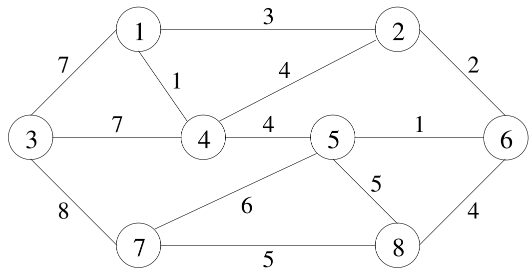
Quindi, ξ_2 è una direzione ammissibile per $\bar{x}$. Il massimo passo di spostamento lungo tale direzione è determinato dai vincoli con indici $i \in J \setminus I$ per cui $A_i \xi_2 > 0$. Nel caso in esame abbiamo $A_2 \xi_2 = 1$, mentre $A_3 \xi_2 = -3$. Quindi, il massimo passo di spostamento lungo ξ_2 è dato da $\bar{\lambda} = (b_2 - A_2 \bar{x})/A_2 \xi_2 = 1$.

Poiché il prodotto scalare

$$c\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

è positivo, ξ_2 è una direzione di crescita.

3) Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame; quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo $T = (N, A_T)$. Tale soluzione ottima è unica? Giustificare la risposta.

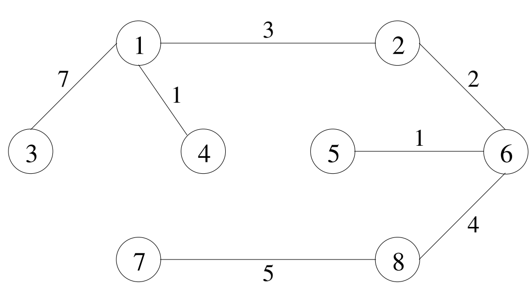


SVOLGIMENTO

Si consideri il seguente ordinamento degli archi per costo non decrescente:
$(1,4),(5,6),(2,6),(1,2),(2,4),(4,5),(6,8),(5,8),(7,8),(5,7),(1,3),(3,4),(3,7)$.

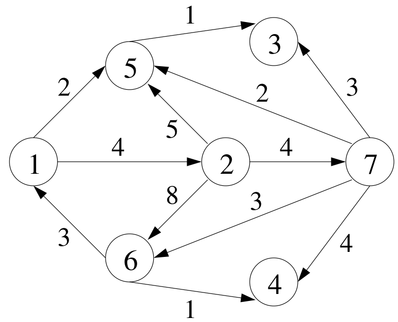
	arco	operazione	taglio	ciclo
it.1)	$(1,4)$	inserzione	$(\{1\},\{2,3,4,5,6,7,8\})$	
it.2)	$(5,6)$	inserzione	$(\{5\},\{1,2,3,4,5,7,8\})$	
it.3)	$(2,6)$	inserzione	$(\{2\},\{1,3,4,5,6,7,8\})$	
it.4)	$(1,2)$	inserzione	$(\{1,4\},\{2,3,5,6,7,8\})$	
it.5)	$(2,4)$	cancellazione		$(2,4,1)$
it.6)	$(4,5)$	cancellazione		$(4,5,6,2,1)$
it.7)	$(6,8)$	inserzione	$(\{8\},\{1,2,3,4,5,6,7\})$	
it.8)	$(5,8)$	cancellazione		$(5,8,6)$
it.9)	$(7,8)$	inserzione	$(\{7\},\{1,2,3,4,5,6,8\})$	
it.10)	$(5,7)$	cancellazione		$(5,7,8,6)$
it.11)	$(1,3)$	inserzione	$(\{3\},\{1,2,4,5,6,7,8\})$	

L'algoritmo termina all'iterazione 11, con l'albero T in figura, in quanto $|A_T| = n - 1 = 7$.



La soluzione individuata non è l'unica soluzione ottima: una soluzione alternativa può essere ottenuta sostituendo l'arco $(1,3)$ con l'arco $(3,4)$ di ugual costo, il che accadrebbe all'ultima iterazione se si fosse scelto il corrispondente ordinamento degli archi.

4) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione trovata è unica? Giustificare la risposta.



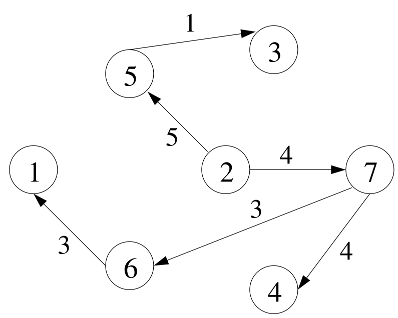
SVOLGIMENTO

Non essendo presenti archi di costo negativo e non essendo il grafo aciclico, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale, tra quelli studiati, è l'algoritmo di Dijkstra, cioè l'algoritmo SPT.S in cui l'insieme Q è implementato come una coda di priorità, che ha complessità in tempo $O(n^2)$.

$$M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 8 + 1 = 49.$$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		2	*nil*	2	2	2	2	2	49	0	49	49	49	49	49	$\{2\}$
1	2	2	*nil*	2	2	2	2	2	49	0	49	49	5	8	4	$\{5,6,7\}$
2	7	2	*nil*	7	7	2	7	2	49	0	7	8	5	7	4	$\{3,4,5,6\}$
3	5	2	*nil*	5	7	2	7	2	49	0	6	8	5	7	4	$\{3,4,6\}$
4	3	2	*nil*	5	7	2	7	2	49	0	6	8	5	7	4	$\{4,6\}$
5	6	6	*nil*	5	7	2	7	2	10	0	6	8	5	7	4	$\{1,4\}$
6	4	6	*nil*	5	7	2	7	2	10	0	6	8	5	7	4	$\{1\}$
7	1	6	*nil*	5	7	2	7	2	10	0	6	8	5	7	4	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura.



La condizione di Bellman per l'arco $(6,4)$, che non appartiene all'albero, è verificata come uguaglianza: infatti, $d_6 + c_{64} = 7 + 1 = 8 = d_4$. Ciò indica la possibilità che la soluzione ottima determinata non sia unica, come in effetti si verifica: infatti, ponendo $p[4] = 6$ si determina un diverso albero dei cammini minimi.

5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & \leq & 2
\end{array}
$$

Utilizzando gli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (1, 2)$ è ottima per il problema. Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$
(P) \quad \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}
$$

il teorema della dualità forte ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per (P). Allora, $\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (D) complementare ad $\bar{x}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verifichino la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$
\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.
$$

Per il problema in esame si ha:

$$
(P) \quad \begin{array}{rrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & \leq & 2
\end{array}
\qquad\qquad
(D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & 3y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & & \\
 & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 2 \\
 & y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (1, 2)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{1, 3, 4\}$. Di conseguenza una soluzione duale $\bar{y}$, tale che $\bar{y}A = c$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\bar{y}_2 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$
\left\{ \begin{array}{rcrcrcl}
y_1 & - & y_3 & & & = & 2 \\
y_1 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\
y_1, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0.
\end{array} \right.
$$

Posto $y_3 = \lambda$, il sistema di equazioni ammette infinite soluzioni della forma $(2 + \lambda, \lambda, -1 - 2\lambda)$. Le prime due componenti di tali soluzioni sono entrambe non negative per $\lambda \geq 0$ mentre la terza è non negativa per $\lambda \leq -1/2$. Pertanto, comunque si scelga λ, la soluzione $\bar{y}(\lambda) = (2 + \lambda, 0, \lambda, -1 - 2\lambda)$ non è ammissibile per (D). Poiché tutte le soluzioni duali complementari a $\bar{x}$ non sono ammissibili, la proposizione permette di concludere che $\bar{x}$ non è una soluzione ottima per (P).

6) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & x_1 & + & 3x_2 & & \\
 & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & \leq & 1 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1 & & & \leq & 1
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2,3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{2,3\}$: $\quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{1,5\} = 1 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\} = \min\{1,1\} = 1,$$

$$h = \min\{i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\} = \min\{2,3\} = 2 \text{ [regola anticiclo di Bland]}.$$

it. 2) $B = \{1,3\}$: $\quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k = 4,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \end{bmatrix}, \ \bar{\theta} = 0, \ h = 3 \text{ [cambio di base degenere duale]}.$$

it. 3) $B = \{1,4\}$: $\quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & -3/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1/7 & -3/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix},$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/7 & -3/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/7 \\ 6/7 \\ 3/7 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

$\bar{x} = (3/7, 6/7)$ è una soluzione ottima primale, mentre $\bar{y} = (1,0,0,0,0)$ è una soluzione ottima duale.