RICERCA OPERATIVA (a.a. 2008/09)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: [I] [SI] **Matricola:** **Corso:** [A] [B]

1) Si consideri una rete di telecomunicazione descritta in termini di un grafo orientato $G = (N, A)$. Sia $u_{ij} \in \mathbb{Z}_+$ la capacità del collegamento $(i, j) \in A$, ovvero il massimo numero di pacchetti inviabili lungo (i, j). Sia inoltre d il numero di pacchetti che il nodo destinazione t deve ricevere dal nodo sorgente s. Nella configurazione corrente della rete, l'invio dei d pacchetti avviene lungo uno specifico cammino P da s a t.

Per ridurre la congestione della rete, il gestore decide di cercare un routing (vale a dire un flusso) alternativo a quello corrente lungo P, da utilizzare congiuntamente a P per l'invio dei pacchetti da s a t. Il routing alternativo non deve utilizzare nessuno degli archi di P. Si formuli in termini di *PLI* il problema di individuare il routing alternativo, e stabilire il numero di pacchetti α (con $\alpha \leq d$) da inviare da s a t mediante questo routing, in modo da minimizzare l'utilizzazione del collegamento più sfruttato, ovvero minimizzare il massimo dei rapporti tra il numero di pacchetti che attraversa un collegamento (i, j) e la sua capacità u_{ij} (si osservi che se α pacchetti sono inviati mediante il routing alternativo, i rimanenti $d - \alpha$ pacchetti continuano ad essere inviati lungo P: il collegamento che massimizza la frazione della sua capacità effettivamente utilizzata va quindi individuato considerando sia i collegamenti interessati dal routing alternativo sia quelli appartenenti a P).

SVOLGIMENTO

Introduciamo il grafo parziale $G' = (N, A')$, dove $A' = A \setminus P$ costituisce l'insieme degli archi non appartenenti al cammino P, e quindi utilizzabili per il routing alternativo. Per descrivere tale routing, per ogni $(i, j) \in A'$ introduciamo la variabilie di flusso x_{ij} che denota il numero di pacchetti inviati lungo il collegamento (i, j).

Una formulazione del problema è la seguente:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \beta & \\
& \displaystyle\sum_{(j,i)\in BS'(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS'(i)} x_{ij} = \begin{cases} -\alpha & \text{se } i = s \\ \alpha & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & i \in N \\
& x_{ij} \leq \beta u_{ij} & (i,j) \in A' \\
& d - \alpha \leq \beta u_{ij} & (i,j) \in P \\
& 0 \leq \alpha \leq d & \\
& 0 \leq \beta \leq 1 & \\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ & (i,j) \in A' \\
& \alpha \in \mathbb{Z}_+ &
\end{array}
$$

Il primo blocco di vincoli (vincoli di conservazione di flusso) garantisce l'invio di α pacchetti da s a t mediante il routing alternativo. In tali vincoli, $FS'(i)$ e $BS'(i)$ denotano la stella uscente e la stella entrante di i in G'. Il secondo ed il terzo blocco di vincoli definiscono l'utilizzazione dei collegamenti, rispettivamente per gli archi in A' (interessati dal routing alternativo) e per quelli di P; in particolare, la variabile di soglia β stima per eccesso la frazione di capacità utilizzata per l'invio. Minimizzando β, viene quindi minimizzata la massima utilizzazione dei collegamenti. I due successivi vincoli garantiscono che il numero di pacchetti inviati lungo il routing alternativo non siano in numero maggiore di quelli disponibili ($\alpha \leq d$) e $\beta \leq 1$; si noti che queste condizioni ed il secondo blocco di vincoli implicano che $x_{ij} \leq u_{ij}$ per ogni arco $(i, j) \in A$. Gli ultimi vincoli, infine, garantiscono l'integralità del flusso e del numero di pacchetti inviati lungo il routing alternativo.

2) Il professore di Ricerca Operativa ha preparato un esercizio di Programmazione Lineare per il compito del prossimo 9 Febbraio. Purtroppo, ha sbadatamente dimenticato il foglio con il testo e la soluzione dell'esercizio nel taschino della camicia, che ha poi lavato in lavatrice. Una volta recuperato ed asciugato il foglio, la maggior parte del testo e della soluzione risulta completamente illeggibile. Il professore riesce comunque a leggere che una soluzione ottima del problema primale è $\bar{x} = (1, 1, 0)$ e che una soluzione ottima del problema duale è $\bar{y} = (2, 0, 0, 1)$ ma non è altrettanto fortunato con la formulazione del problema. Con grande fatica riesce soltanto a decifrare i seguenti dati parziali:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & 6x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\ & & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\ & & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & -x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 2. \end{array}$$

Mentre la funzione obiettivo è completa, i vincoli individuati sono incompleti ed altri mancano completamente. Utilizza le tue conoscenze di Programmazione Lineare per aiutare il professore a recuperare l'esercizio, individuando una formulazione completa del problema primale che sia compatibile con i dati disponibili. Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

Poiché $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ e $\bar{y} \in \mathbb{R}^4$, il problema primale ha 3 variabili e 4 vincoli: una sua possibile formulazione è pertanto data da

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & 6x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\ & a_{11}x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\ & a_{21}x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & -x_1 & + & a_{32}x_2 & + & 2x_3 & \leq & 2 \\ & a_{41}x_1 & + & a_{42}x_2 & + & a_{43}x_3 & \leq & b_4 \end{array}$$

dove i valori dei coefficienti a_{11}, a_{21}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43} e b_4 non sono noti e vanno determinati.

Essendo $\bar{x}$ e $\bar{y}$ una coppia di soluzioni ottime, il teorema della dualità forte garantisce $c\bar{x} = \bar{y}b$: abbiamo quindi $5 = c\bar{x} = \bar{y}b = 6 + b_4$, da cui si deduce $b_4 = -1$. Inoltre, l' ottimalità della coppia di soluzioni garantisce anche che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soddisfano le condizioni degli scarti complementari. In particolare, essendo $\bar{y}_1, \bar{y}_4 \neq 0$, i corrispondenti vincoli del problema primale devono essere attivi in $\bar{x}$; abbiamo quindi:

$$a_{11} + 1 = 3, \quad a_{41} + a_{42} = b_4 = -1.$$

Dalla prima uguaglianza si deduce $a_{11} = 2$.

Essendo $\bar{y}$ ammissibile per il problema duale, devono valere le seguenti uguaglianze:

$$2a_{11} + a_{41} = 6, \quad 2 + a_{42} = -1, \quad -2 + a_{43} = 1.$$

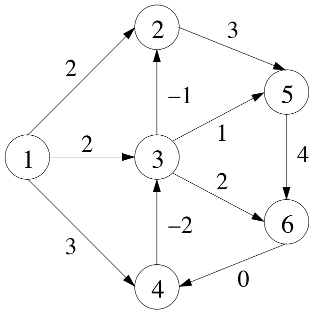
Dalla seconda e dalla terza uguaglianza si deducono immediatamente i valori $a_{42} = -3$ e $a_{43} = 3$. Poiché $a_{11} = 2$, dalla prima uguaglianza si deduce $a_{41} = 2$. Conseguentemente, anche la condizione $a_{41} + a_{42} = -1$ è verificata.

Essendo $\bar{x}$ ammissibile, anche il secondo ed il terzo vincolo devono essere soddisfatti da $\bar{x}$: abbiamo quindi $a_{21}+1 \leq 3$ e $-1 + a_{32} \leq 2$, da cui $a_{21} \leq 2$ e $a_{32} \leq 3$.

Scegliendo, ad esempio, $a_{21} = 2$ e $a_{32} = 3$, una formulazione del problema primale compatibile con i dati recuperati è data da

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \max & 6x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 2 \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq & -1. \end{array}$$

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione trovata è unica? Giustificare la risposta.



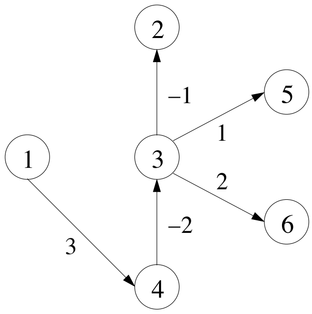
SVOLGIMENTO

Essendo presenti archi di costo negativo (ma non cicli di costo negativo), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.L, in cui Q è implementata come *fila*, che ha complessità in tempo $O(nm)$.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 5 \times 4 + 1 = 21.$

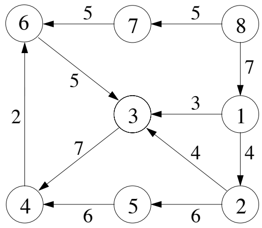
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	Q
0		*nil*	1	1	1	1	1	0	21	21	21	21	21	$\{1\}$
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	0	2	2	3	21	21	$\{2,3,4\}$
2	2	*nil*	1	1	1	2	1	0	2	2	3	5	21	$\{3,4,5\}$
3	3	*nil*	3	1	1	3	3	0	1	2	3	3	4	$\{4,5,2,6\}$
4	4	*nil*	3	4	1	3	3	0	1	1	3	3	4	$\{5,2,6,3\}$
5	5	*nil*	3	4	1	3	3	0	1	1	3	3	4	$\{2,6,3\}$
6	2	*nil*	3	4	1	3	3	0	1	1	3	3	4	$\{6,3\}$
7	6	*nil*	3	4	1	3	3	0	1	1	3	3	4	$\{3\}$
8	3	*nil*	3	4	1	3	3	0	0	1	3	2	3	$\{2,5,6\}$
9	2	*nil*	3	4	1	3	3	0	0	1	3	2	3	$\{5,6\}$
10	5	*nil*	3	4	1	3	3	0	0	1	3	2	3	$\{6\}$
11	6	*nil*	3	4	1	3	3	0	0	1	3	2	3	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura.



La condizione di Bellman per l'arco $(6,4)$, che non appartiene all'albero, è verificata come uguaglianza: infatti, $d_6 + c_{64} = 3 + 0 = 3 = d_4$. Ciò indica la possibilità che la soluzione ottima determinata non sia unica, ma non è questo il caso. Infatti, ponendo $p[4] = 6$ non si determina un albero di cammini orientati dalla radice verso tutti gli altri nodi, bensì un sottografo ciclico e non connesso. Poiché tutti gli altri archi non appartenenti all'albero in figura verificano le condizioni di Bellman come disuguaglianza, la soluzione trovata è l'unico albero dei cammini minimi.

4) Si individui un flusso massimo dal nodo 8 al nodo 4 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio.



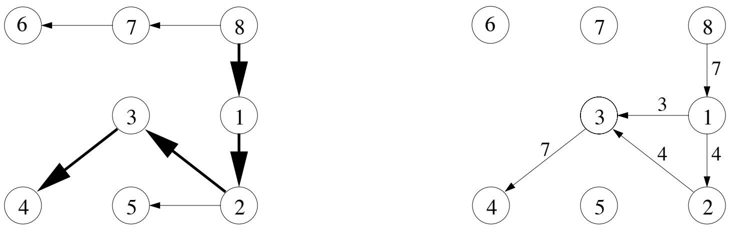
SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

Iterazione 1:

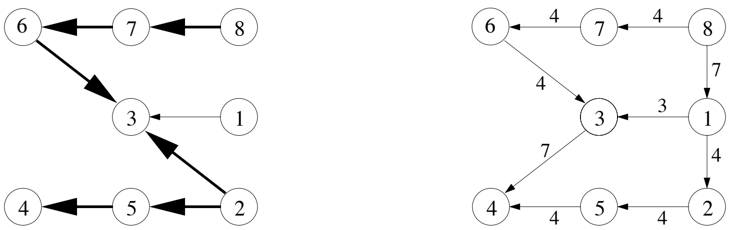
$\theta(P, x) = 3, \quad v = 3$

Iterazione 2:



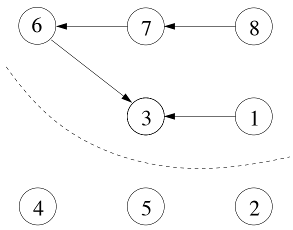
$\theta(P, x) = 4, \quad v = 7$

Iterazione 3:



$\theta(P, x) = 4, \quad v = 11$

Iterazione 4:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo ed inoltre il taglio $N_s = \{1, 3, 6, 7, 8\}$, $N_t = \{2, 4, 5\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 7 + 4 = 11$.

5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{rcrcr}
\max & & x_2 & & \\
x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & & x_2 & \leq & 2 \\
-x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
-x_1 & & & \leq & 0 \\
-x_1 & & & \leq & -4 \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 4
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{4,6\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

$$
\text{it. 1) } B = \{4,6\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix},
$$

$$
\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix},
$$

$$
k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{2,3,5\} = 2 \text{ [regola anticiclo di Bland]},
$$

$$
\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\} = \min\{1,1\} = 1,
$$

$$
h = \min\{i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\} = \min\{4,6\} = 4 \text{ [regola anticiclo di Bland]}.
$$

$$
\text{it. 2) } B = \{2,6\}\text{: } \quad A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},
$$

$$
\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad k = 5,
$$

$$
\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 1, \quad h = 2.
$$

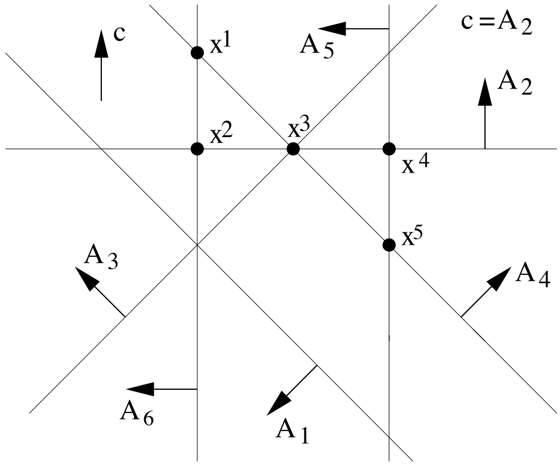
$$
\text{it. 3) } B = \{5,6\}\text{: } \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 1, \quad \eta_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \textit{STOP}
$$

Poiché $\eta_B \leq 0$, il problema duale è inferiormente illimitato, e conseguentemente il problema primale è vuoto.

6) Si risolva graficamente il problema di PL indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{4, 6\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



SVOLGIMENTO

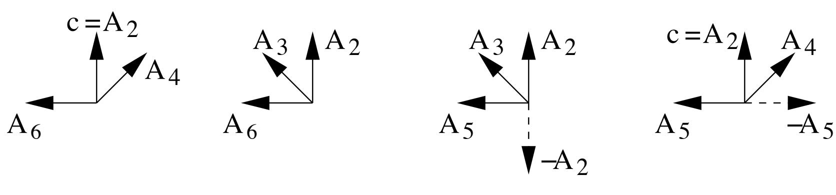
it. 1) $B = \{4, 6\}$, x^1 viola i vincoli 2, 3 e 5 da cui $k = \min\{2, 3, 5\} = 2$ (regola anticiclo di Bland), $y_4 > 0$, $y_6 > 0$ in quanto $c \in$ int cono(A_4, A_6) (figura (a)). La base è duale non degenere ($y_4, y_6 \neq 0$) e primale non degenere ($I(x^1) = \{4, 6\}$). Poiché $c = A_2$, risultano $\eta_4 = y_4 > 0$ e $\eta_6 = y_6 > 0$, quindi $h = \min\{4, 6\} = 4$ (regola anticiclo di Bland).

it. 2) $B = \{2, 6\}$, x^2 viola i vincoli 3 e 5 da cui $k = \min\{3, 5\} = 3$ (regola anticiclo di Bland), $y_2 = 1$, $y_6 = 0$ in quanto $c = A_2$. La base è duale degenere ($y_6 = 0$), ma primale non degenere ($I(x^2) = \{2, 6\}$). Poiché $A_3 \in$ int cono(A_2, A_6) (figura (b)), risultano $\eta_2 > 0$, $\eta_6 > 0$, da cui $y_6/\eta_6 = 0 < y_2/\eta_2$ e quindi $h = 6$.

it. 3) $B = \{2, 3\}$, x^3 viola il vincolo 5 da cui $k = 5$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$ in quanto $c = A_2$. La base è duale degenere ($y_3 = 0$) e primale degenere ($I(x^3) = \{2, 3, 4\}$). Poiché $A_5 \in$ int cono$(-A_2, A_3)$ (figura (c)), risultano $\eta_2 < 0$, $\eta_3 > 0$ e quindi $h = 3$.

it. 4) $B = \{2, 5\}$, x^4 viola il vincolo 4 da cui $k = 4$, $y_2 = 1$, $y_5 = 0$ in quanto $c = A_2$. La base è duale degenere ($y_5 = 0$) ma primale non degenere ($I(x^4) = \{2, 5\}$). Poiché $A_4 \in$ int cono$(A_2, -A_5)$ (figura (d)), risultano $\eta_2 > 0$, $\eta_5 < 0$ e quindi $h = 2$.

it. 5) $B = \{4, 5\}$, x^5 è una soluzione ammissibile per il problema primale e quindi ottima. La base è primale non degenere ($I(x^5) = \{4, 5\}$) e duale non degenere ($y_4 > 0$ e $y_5 > 0$ poiché $c \in$ int cono(A_4, A_5) (figura (d))).



(a) (b) (c) (d)