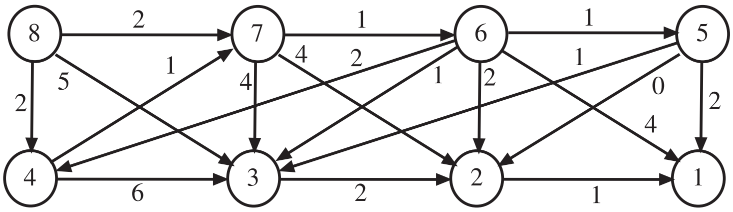
## RICERCA OPERATIVA B (a.a. 2009/10)

# Nome Cognome:

**Corso di Laurea:** L-31 26 Sp **Matricola:**

**1)** Si individui un albero dei cammini minimi di radice 4 sul grafo in figura



utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati $Q$. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione trovata è unica? Giustificare la risposta.

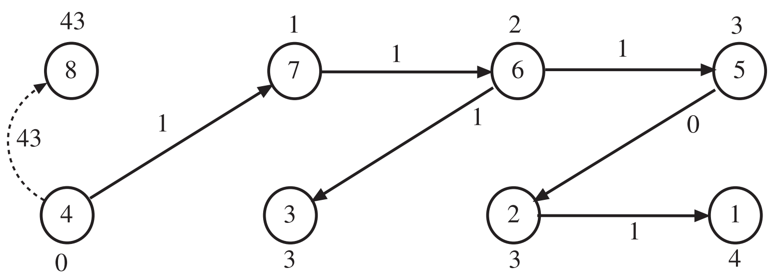
### SVOLGIMENTO

Non essendo presenti archi di costo negativo, e non essendo il grafo aciclico (si consideri ad esempio il ciclo $(4,7,6)$), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$.

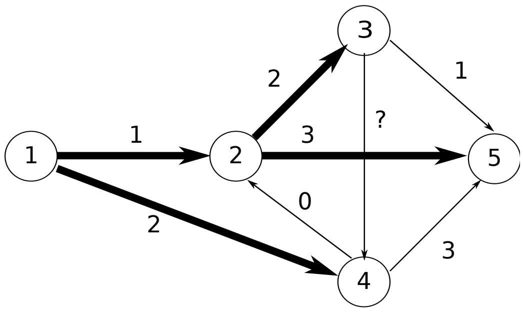
$M = (n-1)c_{max} + 1 = 7 \times 6 + 1 = 43.$

| it. | $u$ | $p[1]$ | $p[2]$ | $p[3]$ | $p[4]$ | $p[5]$ | $p[6]$ | $p[7]$ | $p[8]$ | $d[1]$ | $d[2]$ | $d[3]$ | $d[4]$ | $d[5]$ | $d[6]$ | $d[7]$ | $d[8]$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 4 | 4 | 4 | *nil* | 4 | 4 | 4 | 4 | 43 | 43 | 43 | 0 | 43 | 43 | 43 | 43 | $\{4\}$ |
| 1 | 4 | 4 | 4 | 4 | *nil* | 4 | 4 | 4 | 4 | 43 | 43 | 6 | 0 | 43 | 43 | 1 | 43 | $\{3,7\}$ |
| 2 | 7 | 4 | 7 | 7 | *nil* | 4 | 7 | 4 | 4 | 43 | 5 | 5 | 0 | 43 | 2 | 1 | 43 | $\{2,3,6\}$ |
| 3 | 6 | 6 | 6 | 6 | *nil* | 6 | 7 | 4 | 4 | 6 | 4 | 3 | 0 | 3 | 2 | 1 | 43 | $\{1,2,3,5\}$ |
| 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | *nil* | 6 | 7 | 4 | 4 | 5 | 3 | 3 | 0 | 3 | 2 | 1 | 43 | $\{1,2,3\}$ |
| 5 | 3 | 5 | 5 | 6 | *nil* | 6 | 7 | 4 | 4 | 5 | 3 | 3 | 0 | 3 | 2 | 1 | 43 | $\{1,2\}$ |
| 6 | 2 | 2 | 5 | 6 | *nil* | 6 | 7 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 0 | 3 | 2 | 1 | 43 | $\{1\}$ |
| 7 | 1 | 2 | 5 | 6 | *nil* | 6 | 7 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 0 | 3 | 2 | 1 | 43 | $\emptyset$ |

L'albero trovato è mostrato in figura. Si noti che il nodo 8 non è raggiungibile da 4. Poiché le condizioni di Bellman per gli archi non appartenenti all'albero sono verificate come disuguaglianza, la soluzione ottima è unica.



**2)** Si consideri il grafo in figura in cui il costo associato all'arco $(3, 4)$, $c_{34}$, non è noto. Si individui per quali valori di $c_{34}$ l'albero di copertura $T$ evidenziato in figura è un albero dei cammini minimi di radice 1. Giustificare la risposta. Si fissi quindi $c_{34} = -2$ e, nel caso in cui per tale scelta l'albero $T$ non sia un albero dei cammini minimi di radice 1, si esegua un passo dell'algoritmo SPT per migliorare $T$.




**SVOLGIMENTO**

$T$ è un albero dei cammini minimi di radice 1 se e solo se il vettore di etichette dei nodi $d \in R^5$, tale che $d_i$ è il costo dell'unico cammino in $T$ da 1 a $i$, soddisfa le condizioni di Bellman:

$$d_i + c_{ij} \geq d_j, \text{ per ogni arco } (i, j).$$

Effettuando una visita a ventaglio di $T$ a partire dal nodo 1 si determinano i seguenti valori:

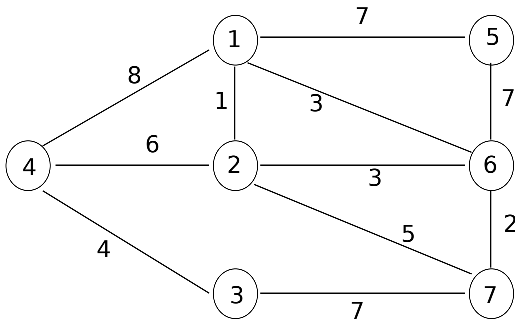
$$d_1 = 0, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = 3, \quad d_4 = 2, \quad d_5 = 4.$$

$T$ è un albero dei cammini minimi di radice 1 per tutti e soli i valori attribuibili a $c_{34}$ che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di Bellman per ogni arco non appartenente a $T$. Consideriamo tali archi:

1. $(4, 2)$: $d_4 + c_{42} \geq d_2$, ovvero $2 \geq 1$: condizione rispettata;
2. $(3, 5)$: $d_3 + c_{35} \geq d_5$, ovvero $4 \geq 4$: condizione rispettata;
3. $(4, 5)$: $d_4 + c_{45} \geq d_5$, ovvero $5 \geq 4$: condizione rispettata;
4. $(3, 4)$: $d_3 + c_{34} \geq d_4$, ovvero $3 + c_{34} \geq 2$; tale condizione è soddisfatta se e solo se $c_{34} \geq -1$.

Quindi, $T$ è un albero dei cammini minimi di radice 1 se e solo se $c_{34} \geq -1$. Si osservi che l'imposizione delle condizioni di Bellman garantisce che il costo dell'unico ciclo orientato, vale a dire $(2, 3, 4)$, sia non negativo per $c_{34} \geq -1$ (il ciclo ha costo $\geq 0$ se e solo se $c_{34} \geq -2$). Scegliendo $c_{34} = -2$, l'arco $(3, 4)$ viola le condizioni di Bellman. E' quindi possibile migliorare $T$, mediante un passo dell'algoritmo SPT, inserendo l'arco $(3, 4)$ al posto di $(1, 4)$, ed aggiornando $d$ ed il vettore dei predecessori $p$: $d_4 := 1$ e $p_4 := 3$.

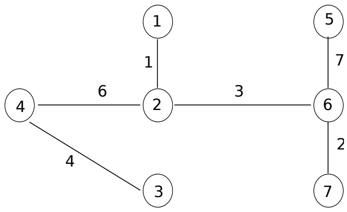
**3)** Si applichi l'algoritmo di Kruskal per determinare un albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura. Per ogni iterazione si indichino: l'arco in esame; quale fra le operazioni di inserzione e cancellazione viene applicata; nel primo caso mostrare un taglio che certifichi la validità dell'operazione di inserzione, nel secondo fornire il ciclo individuato dall'algoritmo. Al termine fornire l'albero di copertura di costo minimo individuato. Tale soluzione ottima è unica? Se non è unica, quante sono le soluzioni ottime alternative? Giustificare le risposte.




**SVOLGIMENTO**
Si consideri il seguente ordinamento degli archi per costo non decrescente:
$(1,2),(6,7),(2,6),(1,6),(4,3),(2,7),(2,4),(5,6),(1,5),(3,7),(1,4)$.

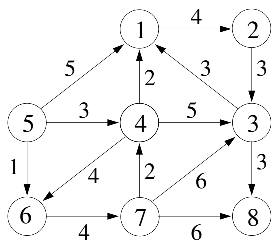
| | arco | operazione | taglio | ciclo |
|---|---|---|---|---|
| it.1) | $(1,2)$ | inserzione | $(\{1\},\{2,3,4,5,6,7\})$ | |
| it.2) | $(6,7)$ | inserzione | $(\{7\},\{1,2,3,4,5,6\})$ | |
| it.3) | $(2,6)$ | inserzione | $(\{1,2\},\{3,4,5,6,7\})$ | |
| it.4) | $(1,6)$ | cancellazione | | $(1,2,6)$ |
| it.5) | $(3,4)$ | inserzione | $(\{3\},\{1,2,4,5,6,7\})$ | |
| it.6) | $(2,7)$ | cancellazione | | $(2,6,7)$ |
| it.7) | $(2,4)$ | inserzione | $(\{3,4\},\{1,2,5,6,7\})$ | |
| it.8) | $(5,6)$ | inserzione | $(\{5\},\{1,2,3,4,6,7\})$ | |

L'algoritmo termina all'iterazione 8 con l'albero $T$ in figura, in quanto $|A_T| = n - 1 = 6$.




La soluzione individuata non è l'unica soluzione ottima: una soluzione ottima alternativa può essere ottenuta sostituendo l'arco $(2,6)$ con l'arco $(1,6)$, di ugual costo; un'ulteriore soluzione ottima può essere ottenuta sostituendo l'arco $(5,6)$ con l'arco $(1,5)$, di ugual costo. Essendo anche possibile sostituire la coppia $((2,6),(5,6))$ con la coppia $((1,6),(1,5))$, ottenendo una terza soluzione ottima alternativa, il numero totale di soluzioni ottime è 4.

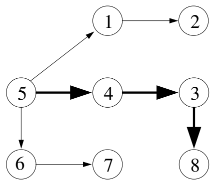
**4)** Si individui un flusso massimo dal nodo 5 al nodo 8 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi $N_s$, l'insieme dei nodi $N_t$ e la capacità del taglio. Aumentando la capacità dell'arco $(2, 3)$ di una unità, come varia il valore del flusso massimo? Giustificare la risposta.

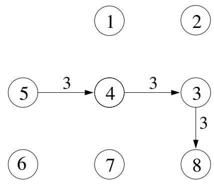


**SVOLGIMENTO**

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante $P$ individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo $P$, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

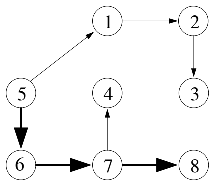
Iterazione 1:

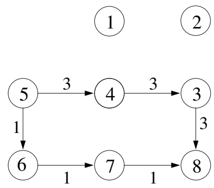




$\theta(P, x) = 3, \quad v = 3$

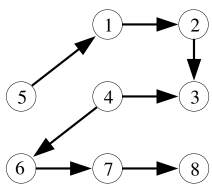
Iterazione 2:

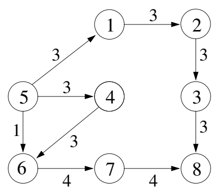




$\theta(P, x) = 1, \quad v = 4$

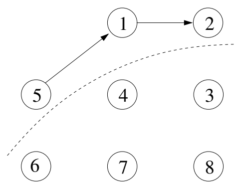
Iterazione 3:





$\theta(P, x) = 3, \quad v = 7$

Iterazione 4:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo; inoltre, il taglio $N_s = \{5, 1, 2\}$, $N_t = \{3, 4, 6, 7, 8\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 1 + 3 + 3 = 7$.

Aumentando la capacità dell'arco $(2, 3)$ di una unità, ovvero se $u_{23} = 4$, il valore del flusso massimo resta invariato. Infatti, considerando il flusso di valore 7 ottenuto alla terza iterazione, anche nel caso $u_{23} = 4$ la procedura di visita termina senza raggiungere la destinazione, individuando il taglio $(\{5, 1, 2, 3\}, \{4, 6, 7, 8\})$ di capacità 7. Si osservi che in tal caso $(\{5, 1, 2\}, \{3, 4, 6, 7, 8\})$ non è più un taglio di capacità minima: la sua capacità è aumentata infatti di una unità e pertanto vale 8.