RICERCA OPERATIVA B (a.a. 2009/10)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: $\boxed{\text{L-31}}$ $\boxed{26}$ $\boxed{\text{Sp}}$ **Matricola:**

1) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & \gamma x_1 & + & (2\gamma-1)x_2 & + & (1-\gamma)x_3 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 5 \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\
 & & & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2
\end{array}
$$

Si determinino i valori del parametro γ per i quali $\bar{x} = (0, 2, -1)$ è una soluzione ottima del problema. Per quali valori di γ , invece, $\bar{x} = (0, 2, -1)$ sarebbe soluzione ottima se il coefficiente di costo della variabile x_2 fosse pari a 1/2? Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Poiché l'insieme degli indici dei vincoli attivi nella soluzione ammissibile $\bar{x}$ è $I = I(\bar{x}) = \{4, 6\}$, il sistema ridotto

$$
(DR) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y_I A_I & = & c \\ y_I & \geq & 0 \end{array} \right.
$$

risulta essere:

$$
(DR) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} & + & y_6 & = & \gamma \\ y_4 & + & y_6 & = & 2\gamma - 1 \\ -y_4 & & & = & 1-\gamma \\ y_4, & & y_6 & \geq & 0 \end{array} \right.
$$

Il sistema di equazioni ammette come unica soluzione $(y_4, y_6) = (\gamma - 1, \gamma)$. Tale soluzione ha componenti non negative per $\gamma \geq 1$. Quindi il sistema (DR) ammette una soluzione se e solo se il parametro γ assume un valore ≥ 1. Di conseguenza, $\bar{x}$ è una soluzione ottima se e solo se $\gamma \geq 1$.

Se il coefficiente di costo della variabile x_2 fosse pari a 1/2, il sistema di equazioni in (DR) ammetterebbe l'unica soluzione $(y_4, y_6) = (\gamma - 1, \gamma)$ solamente per $\gamma = 3/4$. Ma per $\gamma = 3/4$ si ha $y_4 = -1/4$, vale a dire la componente y_4 risulta negativa. Quindi, in tal caso, il sistema (DR) non ammetterebbe soluzione, e pertanto $\bar{x} = (0, 2, -1)$ non sarebbe soluzione ottima per nessun valore di γ.

2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 2y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & & \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Utilizzando gli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (0, 0, 1, 0)$ sia ottima per il problema. Inoltre, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

il teorema della dualità forte ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità duale:

Proposizione. Sia $\bar{y}$ una soluzione ammissibile per (D). Allora, $\bar{y}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per (P) complementare ad $\bar{y}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verifichino la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & - & x_2 & \leq & 1 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 2y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & & \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{y} = (0, 0, 1, 0)$ è ammissibile per (D). L'insieme degli indici delle variabili duali positive in $\bar{y}$ è $J(\bar{y}) = \{j \in \{1, \ldots, m\} : \bar{y}_j > 0\} = \{3\}$. Di conseguenza, una soluzione primale ammissibile $\bar{x}$ che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $b_3 - A_3\bar{x} = 0$, ovvero il terzo vincolo deve essere attivo. Pertanto, $\bar{x}$ deve risolvere l'equazione

$$x_1 \ + \ 2x_2 \ = \ 4.$$

Posto $x_2 = \alpha$, tale equazione ammette infinite soluzioni della forma $x(\alpha) = (4 - 2\alpha, \alpha)$. Tali soluzioni sono ammissibili per (P) per ogni $\alpha \geq 2$. Infatti, $x(\alpha)$ rispetta il primo vincolo per $\alpha \geq 2$, il secondo per $\alpha \geq 1$ ed il quarto per $\alpha \geq -1$. Poiché per $\alpha \geq 2$ $x(\alpha)$ soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\bar{y}$ ed è ammissibile, $\bar{y}$ è una soluzione ottima per (D). Poiché inoltre ogni soluzione ottima di (P) deve essere ammissibile e complementare a $\bar{y}$, $\{(4 - 2\alpha, \alpha) \ : \ \alpha \geq 2\}$ rappresenta l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema (P), duale di quello dato.

3) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{4, 5\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

$$\text{it.1) } B = \{4,5\},\quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix},\quad y_N = 0,\quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = 5,\quad B(h) = 2,$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad J = \{i \in N : A_i\xi > 0\} = \{1,2,3\},$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i\xi,\quad \lambda_1 = 2,\quad \lambda_2 = 4,\quad \lambda_3 = 0,\quad \bar\lambda = \min\{\lambda_i \ :\ i \in J\} = 0,$$

$$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar\lambda\} = 3 \ \text{[cambio di base degenere]}$$

$$\text{it.2) } B = \{3,4\},\quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$y_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix},\quad y_N = 0,\quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix},\quad h = 4,\quad B(h) = 2,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},\quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{1,2\},\quad \bar\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 4,\quad k = \min\{1,2\} = 1 \ \text{[regola anticiclo di Bland]}$$

$$\text{it.3) } B = \{1,3\},\quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix},\quad y_N = 0,\quad y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad h = 3,\quad B(h) = 2,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{2\},\quad \bar\lambda = \lambda_2 = 0,\quad k = 2 \ \text{[cambio di base degenere]}$$

$$\text{it.4) } B = \{1,2\},\quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\quad y_N = 0,\quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \text{STOP.}$$

Poiché $y_B \geq 0$ segue che $x = (-2, 0)$ è una soluzione ottima per (P), mentre $y = (1, 1, 0, 0, 0)$ è una soluzione ottima per (D).

4) In seguito all'aggravarsi delle condizioni di vita della popolazione di una vasta area asiatica, Emergency decide di intervenire. Individua quindi m località candidate all'apertura di un centro di assistenza sanitaria per aiutare gli n villaggi presenti in tale area geografica. Le informazioni note ad Emergency sono le seguenti. Nel caso in cui il centro j venga aperto, esso sarà in grado di assistere al più u_j villaggi, $j = 1, 2, \ldots, m$. E' nota inoltre la distanza d_{ij} intercorrente tra il villaggio i e la località candidata j, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Si aiuti Emergency a decidere in quali delle m località candidate aprire un centro di assistenza sanitaria, e come assegnare gli n villaggi ai centri aperti (ogni villaggio va assegnato ad esattamente un centro aperto), formulando un modello P.L.I. che apra al più N centri di assistenza, garantisca il rispetto delle capacità di servizio dei centri attivati e che, per rendere celeri gli spostamenti dai villaggi verso i centri di assistenza, minimizzi la massima distanza necessaria per raggiungere i centri di assistenza, ovvero minimizzi la distanza maggiore intercorrente tra un villaggio ed il centro di assistenza cui il villaggio è stato assegnato. Si formuli il modello tenendo presente che Emergency ha individuato un sottoinsieme S di località candidate che risultano essere particolarmente critiche, e vuole quindi che almeno un centro di assistenza venga aperto in una località di S. Quali vincoli occorrerebbe aggiungere al modello se, per motivi strategici, Emergency imponesse che, nel caso di apertura di un centro di assistenza nella località r, allora si debba aprire un centro sia nella località s che nella località t, dove r, s e t denotano tre particolari località candidate all'apertura di un centro di assistenza?

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema introduciamo m variabili binarie y_j tali che $y_j = 1$ se e solo se Emergency decide di aprire un centro di assistenza nella località j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Introduciamo inoltre le seguenti variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il villaggio } i \text{ viene assegnato al centro } j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Il problema di Emergency può essere formulato mediante il seguente modello P.L.I:

$$\begin{array}{lll} \min & z & \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, 2, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j y_j & j = 1, 2, \ldots, m \\ & \sum_{j=1}^{m} y_j \leq N & \\ & \sum_{j \in S} y_j \geq 1 & \\ & d_{ij} x_{ij} \leq z & i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m \\ & y_j \in \{0, 1\} & j = 1, 2, \ldots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

Il primo blocco di vincoli, di semiassegnamento, garantisce che ogni villaggio sia assegnato ad esattamente un centro di assistenza. Il secondo blocco di vincoli è costituito da vincoli che sono congiuntamente vincoli logici e di capacità. Tali vincoli impongono infatti che, se il centro j viene aperto (vale a dire $y_j = 1$), allora assista al più u_j villaggi; altrimenti (vale a dire $y_j = 0$), tutte le variabili di assegnamento relative a j vengono forzate a 0, cioè nessun villaggio può essere assegnato a j in quanto il centro j non è stato attivato. Il vincolo $\sum_{j=1}^{m} y_j \leq N$ garantisce che vengano aperti al più N centri di assistenza. Il vincolo di copertura $\sum_{j \in S} y_j \geq 1$ garantisce che almeno un centro di assistenza venga attivato in corrispondenza delle località in S. Infine, la variabile ausiliaria z stima per eccesso la massima distanza necessaria per raggiungere i centri di assistenza. Minimizzando z, a livello di soluzione ottima z rappresenta proprio tale massima distanza, che pertanto viene minimizzata (si tratta dei cosiddetti vincoli di soglia). Per imporre poi che, nel caso di apertura di un centro di assistenza nella località r, allora si debba aprire un centro sia nella località s che nella località t, basta aggiungere al modello il vincolo logico $2y_r \leq y_s + y_t$ (o, equivalentemente, la coppia di vincoli logici $y_r \leq y_s$ e $y_r \leq y_t$).