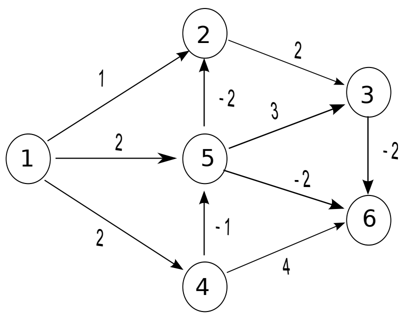
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2010/11)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: L-31 26 Sp **Matricola:**

1) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione ottima è unica? Giustificare la risposta.



SVOLGIMENTO

Rinumerando i nodi come segue

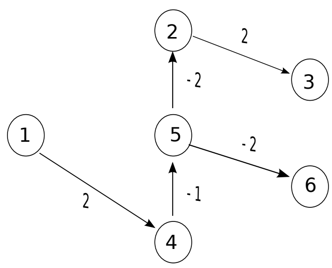
originale	1	2	3	4	5	6
rinumerato	1	4	5	2	3	6

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti, per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo). Nello svolgimento si fa riferimento alla nuova numerazione dei nodi. Inoltre, non viene riportato Q in quanto non utilizzato da SPT.Acyclic.

$$M = (n - 1) \max\{c_{ij} : (i, j) \in A\} + 1 = 5 \times 4 + 1 = 21.$$

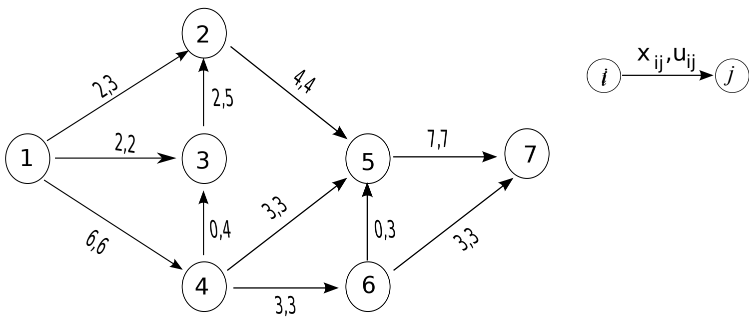
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$
0		*nil*	1	1	1	1	1	0	21	21	21	21	21
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	0	2	2	1	21	21
2	2	*nil*	1	2	1	1	2	0	2	1	1	21	6
3	3	*nil*	1	2	3	3	3	0	2	1	-1	4	-1
4	4	*nil*	1	2	3	4	3	0	2	1	-1	1	-1
5	5	*nil*	1	2	3	4	3	0	2	1	-1	1	-1

Albero dei cammini minimi individuato (sul grafo originale):



La soluzione ottima non è unica; infatti l'arco $(3, 6)$, di costo -2, rispetta le condizioni di Bellman come uguaglianza, e potrebbe sostituire nella soluzione l'arco $(5, 6)$, producendo un diverso albero dei cammini minimi.

2) Si consideri il problema di flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 sul grafo in figura, per il quale viene fornito un flusso ammissibile. Dati i tagli $(N_s^1, N_t^1) = (\{1, 3, 4\}, \{2, 5, 6, 7\})$ e $(N_s^2, N_t^2) = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{7\})$, si verifichi se almeno uno di questi tagli sia un taglio di capacità minima. In caso affermativo, esiste un taglio di capacità minima alternativo? Giustificare le risposte.



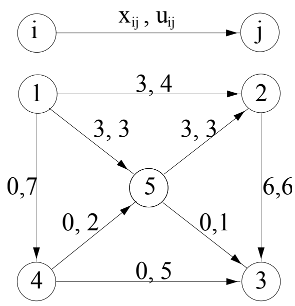
SVOLGIMENTO

- $u(N_s^1, N_t^1) = u_{12} + u_{32} + u_{45} + u_{46} = 3 + 5 + 3 + 3 = 14$
- $u(N_s^2, N_t^2) = u_{57} + u_{67} = 7 + 3 = 10.$

Quindi (N_s^1, N_t^1) non è un taglio di capacità minima. Dato invece che $u(N_s^2, N_t^2) = 10$, ovvero la capacità di (N_s^2, N_t^2) è uguale al valore del flusso in figura, dal Teorema Flusso Massimo - Taglio Minimo segue che (N_s^2, N_t^2) è un taglio di capacità minima, ed il flusso specificato in figura è pertanto un flusso massimo.

L'algoritmo di Edmonds e Karp, eseguito a partire dal flusso massimo in figura, individuerebbe il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\})$, che è quindi un taglio di capacità minima alternativo a (N_s^2, N_t^2).

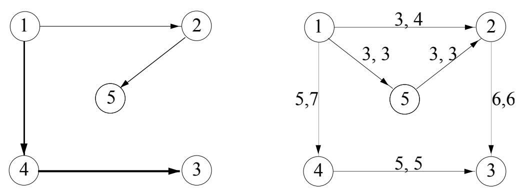
3) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 3 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso dato. Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore (si esaminino gli archi di ogni stella uscente in ordine crescente dei nodi testa). Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. Diminuendo la capacità dell'arco $(1, 4)$ di 3 unità, come varia il valore del flusso massimo? Giustificare la risposta.



SVOLGIMENTO

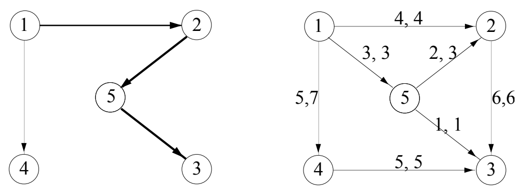
Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita sul grafo residuo, evidenziando il cammino aumentante P individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

Iterazione 1:



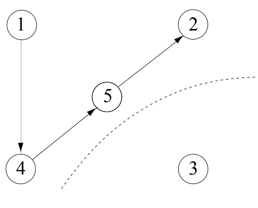
$\theta(P, x) = 5, \quad v = 11$

Iterazione 2:



$\theta(P, x) = 1, \quad v = 12$

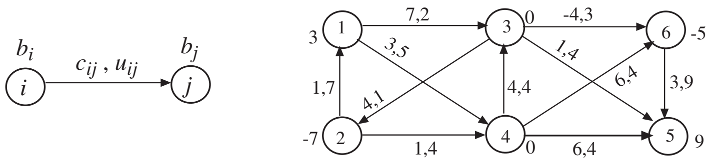
Iterazione 3:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo; inoltre, il taglio $N_s = \{1, 2, 4, 5\}$, $N_t = \{3\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 5 + 1 + 6 = 12 = v$.

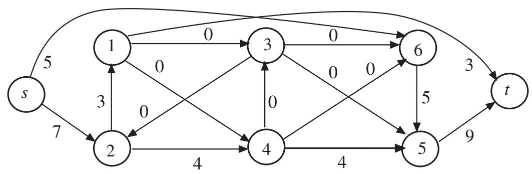
Diminuendo la capacità dell'arco $(1, 4)$ di 3 unità, ovvero se $u_{14} = 4$, il flusso trovato diventa non ammissibile, in quanto il vincolo di capacità relativo all'arco $(1, 4)$ viene violato ($x_{14} = 5 > 4 = u_{14}$). Per rendere il flusso corrente ammissibile bisogna quindi porre $x_{14} = 4$, e di conseguenza $x_{43} = 4$ per rispettare il vincolo di bilanciamento relativo al nodo 4. Il valore del flusso massimo diminuisce pertanto di una unità. Infatti, eseguendo la procedura di visita a partire dal flusso così modificato, essa termina senza raggiungere la destinazione, individuando il taglio $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5\})$ di capacità 11. Si osservi che in tal caso $(\{1, 2, 4, 5\}, \{3\})$ non è più un taglio di capacità minima.

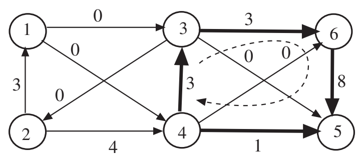
4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo relativamente all'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione di cicli. Si determini un flusso ammissibile iniziale utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp (relativamente all'istanza di flusso massimo ottenibile mediante l'aggiunta di una sorgente e una destinazione fittizi), senza riportare i passi effettuati. Per ogni iterazione dell'algoritmo si mostri quindi il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e si indichi il flusso ottenuto dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che il flusso ottenuto è di costo minimo.



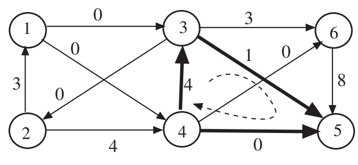
SVOLGIMENTO

L'istanza del problema di flusso massimo da utilizzare per individuare un flusso ammissibile iniziale è mostrata nella prima figura, insieme al flusso massimo ottenuto mediante l'applicazione dell'algoritmo di Edmonds e Karp. Una volta eliminati nodi e archi fittizi, tale flusso massimo fornisce un flusso ammissibile iniziale, di costo $cx = 46$. L'algoritmo di cancellazione di cicli esegue due iterazioni, illustrate dalle successive due figure (dall'alto in basso): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi evidenziati) col il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La quarta figura mostra il grafo residuo relativo all'ultimo flusso individuato ed il corrispondente albero dei cammini minimi (archi evidenziati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.





$\theta = 3$, $c(C) = -3$, $cx = 37$



$\theta = 1$, $c(C) = -1$, $cx = 36$