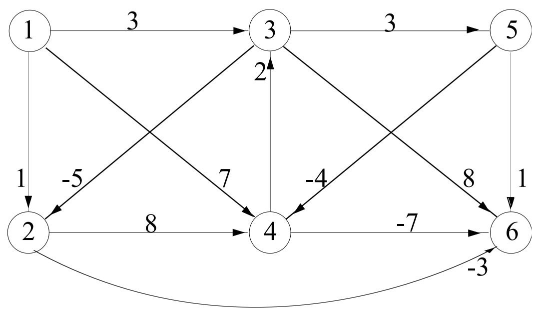
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2010/11)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: L-31 26 Sp **Matricola:**

1) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura



utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Si esamino gli archi della stella uscente del nodo visitato per ordine di nodo testa crescente. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione trovata è unica? Giustificare la risposta.

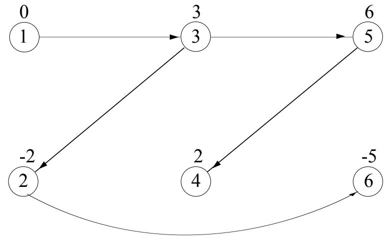
SVOLGIMENTO

Non essendo il grafo aciclico (si consideri ad esempio il ciclo $(2, 4, 3, 2)$), ed essendo presenti archi di costo negativo (si consideri ad esempio l'arco $(3, 2)$), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.L, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 5 \times 8 + 1 = 41.$

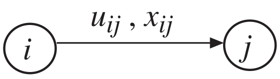
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	Q
0		*nil*	1	1	1	1	1	0	41	41	41	41	41	$\{1\}$
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	0	1	3	7	41	41	$\{2, 3, 4\}$
2	2	*nil*	1	1	1	1	2	0	1	3	7	41	-2	$\{3, 4, 6\}$
3	3	*nil*	3	1	1	3	2	0	-2	3	7	6	-2	$\{4, 6, 2, 5\}$
4	4	*nil*	3	1	1	3	2	0	-2	3	7	6	-2	$\{6, 2, 5\}$
5	6	*nil*	3	1	1	3	2	0	-2	3	7	6	-2	$\{2, 5\}$
6	2	*nil*	3	1	2	3	2	0	-2	3	6	6	-5	$\{5, 4, 6\}$
7	5	*nil*	3	1	5	3	2	0	-2	3	2	6	-5	$\{4, 6\}$
8	4	*nil*	3	1	5	3	2	0	-2	3	2	6	-5	$\{6\}$
9	6	*nil*	3	1	5	3	2	0	-2	3	2	6	-5	$\{\emptyset\}$

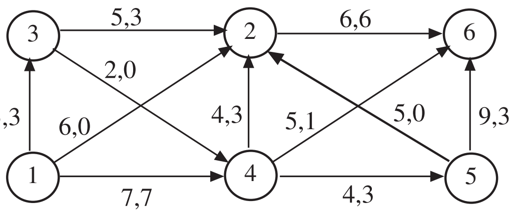
L'albero trovato è mostrato in figura.



La soluzione ottima individuata non è unica in quanto l'arco $(4, 6)$ verifica le condizioni di Bellman come uguaglianza, e pertanto può essere inserito nell'albero dopo aver rimosso l'arco $(2, 6)$.

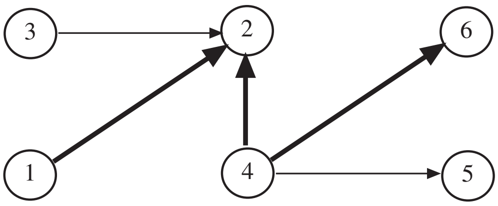
2) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato, di valore $v = 10$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità.





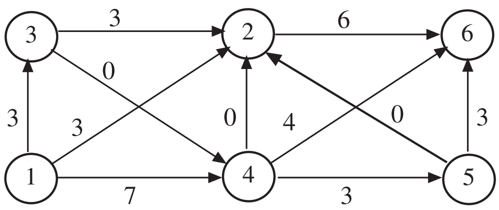
SVOLGIMENTO
L'algoritmo compie quattro iterazioni, rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ognuna delle prime tre iterazioni, a sinistra è mostrato l'albero della visita ed il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, pari alla capacità $\theta(P, x)$, col relativo valore v.

it. 1)

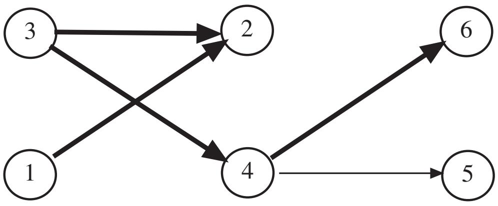


$\theta(P, x) = 3$

$v = 13$

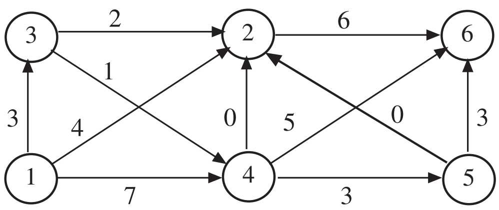


it. 2)

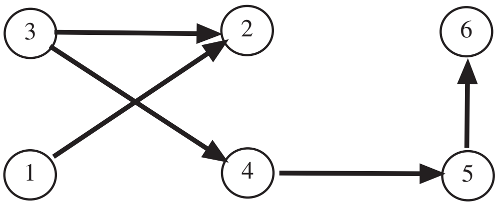


$\theta(P, x) = 1$

$v = 14$

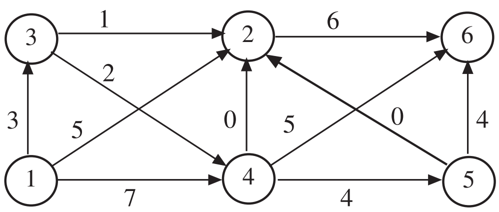


it. 3)

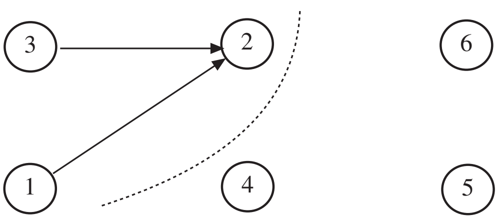


$\theta(P, x) = 1$

$v = 15$



it. 4)



Per la quarta iterazione è mostrato solamente l'albero della visita, che non include il nodo $t = 6$. Pertanto il flusso non cambia da quello dell'iterazione precedente, che è il flusso massimo, e l'algoritmo termina determinando il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$, di capacità minima. Infatti $u(N_s, N_t) = u_{14} + u_{34} + u_{26} = 7 + 2 + 6 = 15 = v$.

3) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & - & x_2 & \leq & -2 \end{array}$$

Utilizzando le condizioni degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (0, 2)$ sia ottima per il problema. Inoltre, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

il teorema forte della dualità ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per (P). Allora, $\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (D) complementare a $\bar{x}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verifichino le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

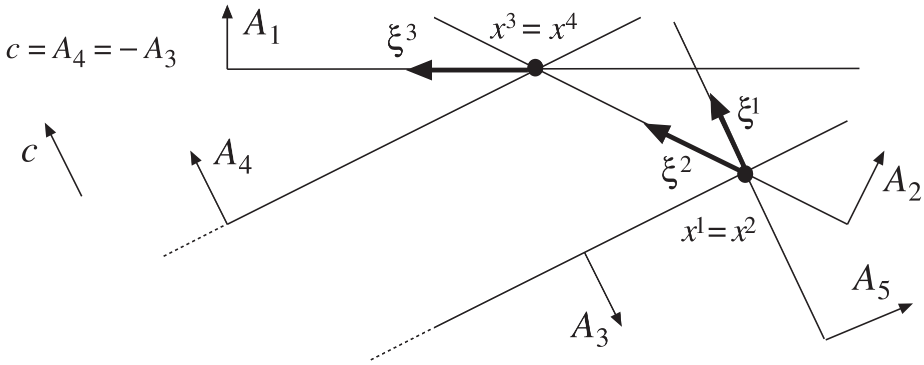
$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & - & x_2 & \leq & -2 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & 2y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & - & 2y_4 & & \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (0, 2)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\overline{x}$ è $I(\overline{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\overline{x} = 0\} = \{1, 3, 4\}$. Di conseguenza, una soluzione duale $\overline{y}$, tale che $\overline{y}A = c$, che formi con $\overline{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\overline{y}_2 = 0$. Affinché $\overline{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} y_1 + y_3 = 1 \\ y_1 + 2y_3 - y_4 = 2 \\ y_1,\ y_3,\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Posto $y_4 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $(-\alpha, 1+\alpha, \alpha)$. L'unica di tali soluzioni avente componenti non negative è $(0, 1, 0)$, ottenuta fissando $\alpha = 0$. Pertanto, $\overline{y} = (0, 0, 1, 0)$ è una soluzione ammissibile per (D). Poichè $\overline{y}$ soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\overline{x}$, $\overline{x}$ è una soluzione ottima per (P), e $\overline{y}$ è una soluzione ottima per (D). Inoltre, poichè $\overline{y}$ è l'unica soluzione ammissibile per (D) che soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\overline{x}$, segue anche che $\overline{y}$ è l'unica soluzione ottima di (D).

4) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{3, 5\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



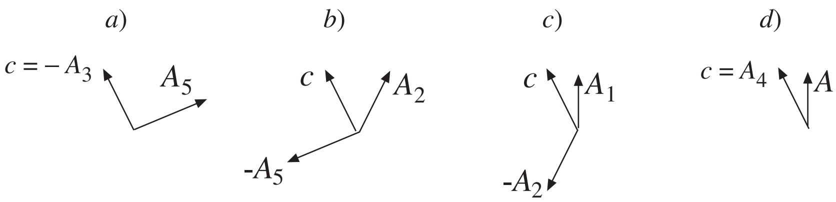
SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{3, 5\}$, $y_3 < 0$ e $y_5 = 0$ poiché c appartiene al cono generato dal solo $-A_3$, come mostrato in figura a); quindi, la base è duale degenere e $h = 3$. La base è primale degenere, in quanto $I(x^1) = \{2, 3, 5\}$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene infatti in corrispondenza al vincolo 2, che è attivo: si esegue quindi un cambio di base degenere, selezionando $k = 2$.

it.2) $B = \{2, 5\}$, $y_2 > 0$ e $y_5 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_2 e $-A_5$, come mostrato in figura b); quindi, $h = 5$. La base è quindi duale non degenere, mentre resta ovviamente primale degenere in quanto $x^2 = x^1$ implica $I(x^2) = I(x^1)$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza ai vincoli 1 e 4, e quindi $k = \min\{1, 4\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it.3) $B = \{1, 2\}$, $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_2$, come mostrato in figura c); quindi, $h = 2$. La base è quindi duale non degenere, ma è primale degenere in quanto $I(x^3) = \{1, 2, 4\}$. Infatti, il massimo passo lungo la direzione ξ^3 è zero, e si ottiene proprio in corrispondenza al vincolo 4, attivo ma non in base: si esegue quindi un altro cambio di base degenere selezionando $k = 4$.

it.4) $B = \{1, 4\}$, $y_1 = 0$ e $y_4 = 1$ (quindi maggiore di zero) poiché c appartiene al cono generato dal solo vettore A_4, come mostrato in figura d). Quindi la base, che resta primale degenere, è duale ammissibile e degenere: l'algoritmo quindi termina avendo determinato che x^4 è una soluzione ottima del problema. Si noti che sono ottimi anche tutti i punti della faccia del poliedro individuata dal vincolo 4 (ovvero la semiretta di origine x^4 perpendicolare a $A_4 = c$).



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & & & x_2 & & \\
& x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
& & & x_2 & \leq & 2 \\
& -x_1 & & & \leq & 0 \\
& -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
& -x_1 & & & \leq & -6 \\
& x_1 & + & x_2 & \leq & 4
\end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3, 6\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

$$\text{it. 1) } B = \{3,6\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\ \bar{y}_N = 0,\ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{2,4,5\} = 2 \quad \text{[regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = \min\{1,1\} = 1,$$

$$h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\ \} = \min\{3,6\} = 3 \quad \text{[regola anticiclo di Bland]}.$$

$$\text{it. 2) } B = \{2,6\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{y}_N = 0,\ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix},\quad k = 5,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix},\ \bar{\theta} = 1,\quad h = 2$$

$$\text{it. 3) } B = \{5,6\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\ \bar{y}_N = 0,\ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, k = 1,\ \eta_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix},\ \mathit{STOP}.$$

Poichè $\eta_B \leq 0$, il problema duale è inferiormente illimitato, e di conseguenza il problema primale è vuoto.

6) Il provider di servizi di assistenza medica domiciliare *HC* deve prestare assistenza giornaliera a n pazienti mediante m operatori sanitari. Il paziente i necessita di una tipologia di assistenza medica che richiede un tempo di servizio stimato pari a t_i ore, $i = 1, ...n$. L'operatore sanitario j, per proprie regole contrattuali, deve lavorare al massimo per T_j ore al giorno; l'operatore j, inoltre, ha la facoltà di segnalare il sottoinsieme $C(j)$ di pazienti che preferirebbe assistere, $j = 1, ...m$.

HC definisce il *coefficiente di utilizzazione* dell'operatore j come il tempo totale di servizio giornaliero di j (espresso come somma dei tempi di servizio dei pazienti assegnati a j) diviso la durata lavorativa giornaliera T_j, e si pone l'obiettivo di assegnare gli n pazienti agli m operatori secondo un criterio equo.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di assegnare i pazienti agli operatori in modo che ogni paziente sia assegnato ad esattamente un operatore, la durata massima di lavoro di ogni operatore non sia ecceduta, e le preferenze degli operatori siano rispettate, massimizzando (per garantire un criterio di equità) il minimo coefficiente di utilizzazione degli operatori.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema introduciamo le variabili di assegnamento

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il paziente } i \text{ viene assegnato all'operatore } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, ..m, i \in C(j).$$

Introduciamo inoltre una variabile ausiliaria z (variabile di soglia), per stimare il minimo coefficiente di utilizzazione degli operatori. Utilizzando tali variabili decisionali il problema del provider *HC* può essere formulato mediante il seguente modello P.L.I:

$$\begin{array}{lll} \max & z & \\ & \displaystyle\sum_{j:\ i \in C(j)} x_{ij} = 1 & i = 1, ...n \\ & \displaystyle\sum_{i \in C(j)} t_i x_{ij} \leq T_j & j = 1, ...m \\ & \displaystyle\sum_{i \in C(j)} t_i x_{ij}/T_j \geq z & j = 1, ...m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & j = 1, ...m,\ i \in C(j). \end{array}$$

Il primo blocco di vincoli, di semiassegnamento, garantisce che ogni paziente sia assegnato ad esattamente un operatore. Il secondo blocco di vincoli garantisce sia il rispetto della durata massima lavorativa degli operatori, che il soddisfacimento delle preferenze espresse. Il terzo blocco di vincoli garantisce che z sia una stima per difetto del coefficiente di utilizzazione di ogni operatore. Massimizzando z, a livello di soluzione ottima z risulterà uguale al coefficiente di utilizzazione minimo, che verrà pertanto massimizzato.