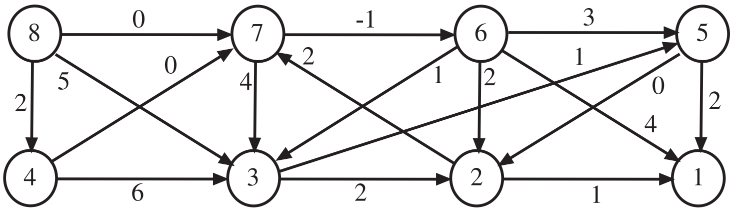
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2010/11)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: L-31 26 Sp **Matricola:**

1) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 4 sul grafo in figura



utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q; durante l'algoritmo, si visitino gli archi della stella uscente di u in ordine crescente del nodo testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione trovata è unica? Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

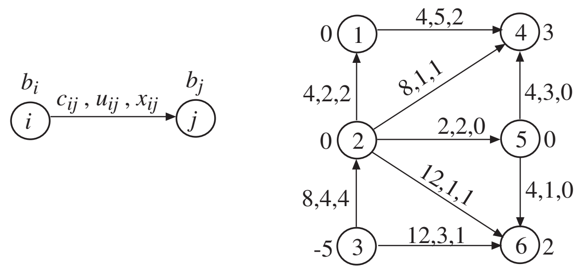
Non essendo il grafo aciclico (si consideri ad esempio il ciclo $(7,3,2)$), ed essendo presenti archi di costo negativo (si consideri ad esempio l'arco $(7,6)$), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.L, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 7 \times 6 + 1 = 43.$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$p[8]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$d[8]$	Q
0		4	4	4	*nil*	4	4	4	4	43	43	43	0	43	43	43	43	$\{4\}$
1	4	4	4	4	*nil*	4	4	4	4	43	43	6	0	43	43	0	43	$\{3,7\}$
2	3	4	3	4	*nil*	3	4	4	4	43	8	6	0	7	43	0	43	$\{7,2,5\}$
3	7	4	3	7	*nil*	3	7	4	4	43	8	4	0	7	-1	0	43	$\{2,5,3,6\}$
4	2	2	3	7	*nil*	3	7	4	4	9	8	4	0	7	-1	0	43	$\{5,3,6,1\}$
5	5	2	5	7	*nil*	3	7	4	4	9	7	4	0	7	-1	0	43	$\{3,6,1,2\}$
6	3	2	3	7	*nil*	3	7	4	4	9	6	4	0	5	-1	0	43	$\{6,1,2,5\}$
7	6	6	6	6	*nil*	6	7	4	4	3	1	0	0	2	-1	0	43	$\{1,2,5,3\}$
8	1	6	6	6	*nil*	6	7	4	4	3	1	0	0	2	-1	0	43	$\{2,5,3\}$
9	2	2	6	6	*nil*	6	7	4	4	2	1	0	0	2	-1	0	43	$\{5,3,1\}$
10	5	2	6	6	*nil*	6	7	4	4	2	1	0	0	2	-1	0	43	$\{3,1\}$
11	3	2	6	6	*nil*	3	7	4	4	2	1	0	0	1	-1	0	43	$\{1,5\}$
12	1	2	6	6	*nil*	3	7	4	4	2	1	0	0	1	-1	0	43	$\{5\}$
13	5	2	6	6	*nil*	3	7	4	4	4	3	2	0	3	1	2	43	$\emptyset$

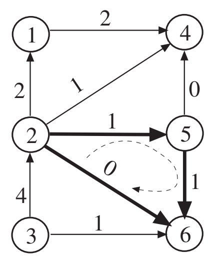
Si noti che il nodo 8 non è raggiungibile da 4. Poiché le condizioni di Bellman, per alcuni archi non appartenenti all'albero, sono verificate come uguaglianza, la soluzione ottima puó non essere unica. Infatti è possibile ottenere una soluzione ottima alternativa sostituendo nella soluzione l'arco $(6,2)$ con l'arco $(5,2)$, che rispetta le condizioni di Bellman come uguaglianza.

2) Si risolva il problema di flusso di costo minimo, relativamente all'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo di cancellazione di cicli a partire dal flusso indicato. Per ogni iterazione dell'algoritmo si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e si indichi il flusso ottenuto dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che il flusso ottenuto è di costo minimo.

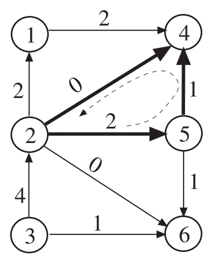


SVOLGIMENTO

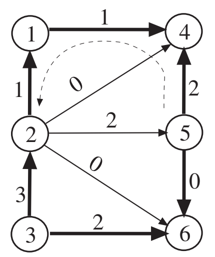
Il flusso ammissibile iniziale ha costo $cx = 80$. A partire da tale flusso, l'algoritmo di cancellazione di cicli esegue tre iterazioni, illustrate dalle prime tre figure (dall'alto in basso, da sinistra a destra): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi evidenziati) col il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La quarta figura mostra il grafo residuo relativo all'ultimo flusso individuato ed il corrispondente albero dei cammini minimi (archi evidenziati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.



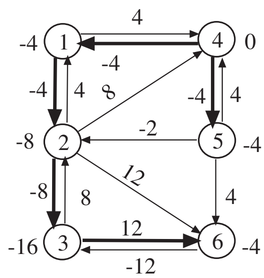
θ = 1, c(C) = -6, cx = 74



θ = 1, c(C) = -2, cx = 72



θ = 1, c(C) = -4, cx = 68



3) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max & -x_1 & - & 2x_2 & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & - & x_2 & \leq & 0
\end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. Se, una volta risolto il problema, il termine noto del penultimo vincolo diventasse 1 (ovvero, il penultimo vincolo fosse $-x_1 \leq 1$), la soluzione ottima primale determinata dall'algoritmo continuerebbe a restare ottima? In caso contrario, quale algoritmo del Simplesso utilizzeresti per risolvere il problema primale modificato, per cercare di sfruttare la computazione già effettuata?

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = 2, \quad B(h) = 2,$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{3, 4, 5\},$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = 4, \quad \bar{\lambda} = \min\{\lambda_i \ : \ i \in J\} = 0,$$

$$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = 4 \quad \text{[cambio di base degenere]}$$

it.2) $B = \{1, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 1, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{3, 5\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_3 = \lambda_5 = 4, \quad k = \min\{3, 5\} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

it.3) $B = \{3, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 4, \quad B(h) = 2,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

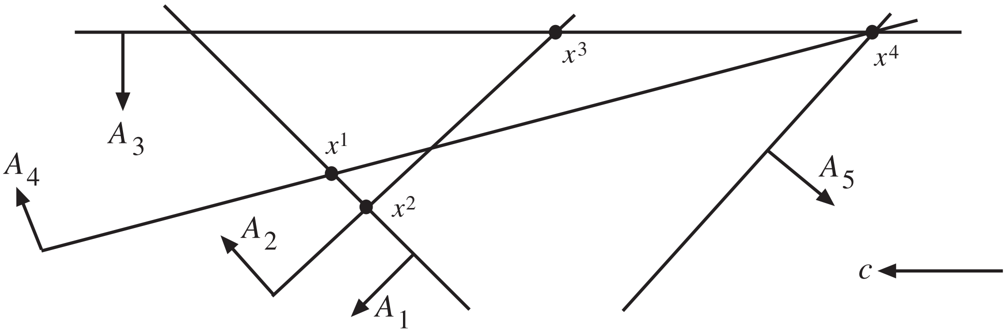
$$J = \{5\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_5 = 0, \quad k = 5 \text{ [cambio di base degenere]}$$

it.4) $B = \{3, 5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

Poiché $y_B \geq 0$ segue che $x = (-2, 0)$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $y = (0, 0, 1, 0, 1)$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. Se il penultimo vincolo diventasse $-x_1 \leq 1$, la soluzione $x = (-2, 0)$ non sarebbe più ottima per il problema primale, in quanto non ammissibile (il quarto vincolo sarebbe violato). In tal caso converrebbe utilizzare l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{3, 5\}$, in quanto tale base rimarrebbe duale ammissibile.

4) Si risolva graficamente il problema di PL indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



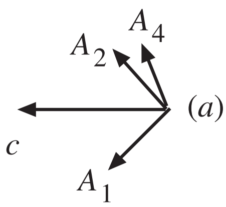
SVOLGIMENTO

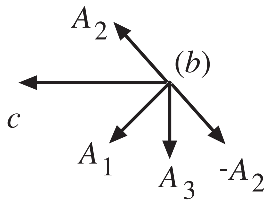
it. 1) $B = \{1, 4\}$. La soluzione primale di base x^1 viola i vincoli 2 e 3, pertanto $k = \min\{2, 3\} = 2$ per la regola anticiclo di Bland. $y_1 > 0$ e $y_2 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_1 e A_2. La base è pertanto duale non degenere, ed è anche primale non degenere in quanto $I(x^1) = \{1, 4\}$. Poiché $A_2 \in \text{cono}(A_1, A_4)$, come mostrato in figura (a), risultano $\eta_1 > 0$, $\eta_4 > 0$. Ma è anche evidente che mentre la base $B = \{1, 2\}$ è ammissibile, la base $\{2, 4\}$ non lo è (si veda ancora la figura (a): $c \in \text{cono}(A_1, A_2)$, mentre $c \notin \text{cono}(A_2, A_4)$). Pertanto dovrà sicuramente risultare $y_1/\eta_1 > y_4/\eta_4$, e quindi $h = 4$.

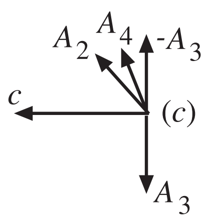
it. 2) $B = \{1, 2\}$. La soluzione primale di base x^2 viola il solo vincolo 3, pertanto $k = 3$. $y_1 > 0$ e $y_2 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_1 e A_2. La base è pertanto duale non degenere, ed è anche primale non degenere in quanto $I(x^2) = \{1, 2\}$. Poiché $A_3 \in \text{cono}(A_1, -A_2)$, come mostrato in figura (b), risultano $\eta_1 > 0$, $\eta_2 < 0$; pertanto $h = 1$.

it. 3): $B = \{2, 3\}$. La soluzione primale di base x^3 viola il solo vincolo 4, pertanto $k = 4$. $y_2 > 0$ e $y_3 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_2 e A_3. La base è pertanto duale non degenere, ed è inoltre primale non degenere in quanto $I(x^3) = \{2, 3\}$. Poiché $A_4 \in \text{cono}(A_2, -A_3)$, come mostrato in figura (c), risultano $\eta_2 > 0$, $\eta_3 < 0$; pertanto $h = 2$.

it. 4): $B = \{3, 4\}$. La soluzione primale di base x^4 non viola alcun vincolo, e pertanto x^4 è ottima per il problema primale. $y_3 > 0$ e $y_4 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_3 e A_4; la base è pertanto duale non degenere, ma è primale degenere in quanto $I(x^3) = \{3, 4, 5\}$. In effetti, è facile verificare che x^4 è l'*unica* soluzione ammissibile del problema, e di conseguenza è sicuramente la soluzione ottima. Qualsiasi traslazione, per quanto piccola, della retta corrispondente al quinto vincolo (individuato da A_5) in direzione opposta a quella del suo gradiente renderebbe x^4 inammissibile, e quindi il problema primale vuoto ed il problema duale superiormente illimitato (essendo non vuoto).







5) Il gruppo commerciale *Sat* decide di aprire m punti vendita per rifornire n clienti. Sia u_j il massimo numero di clienti che il punto vendita j è in grado di rifornire, e sia c_{ij} il costo di servizio sostenuto da j nel caso in cui rifornirà il cliente i, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Tramite un'indagine di mercato, *Sat* stima il coefficiente di soddisfacimento, s_{ij}, del cliente i nel caso in cui verrà rifornito dal punto vendita j. Per cercare di favorire il soddisfacimento dei clienti, *Sat* decide di far pagare ad ogni punto vendita j una penalità p_j nel caso in cui il soddisfacimento totale dei clienti da esso riforniti risulterà inferiore ad una prefissata soglia S. Si formuli in termini di P.L.I. il problema di assegnare gli n clienti agli m punti vendita in modo che ogni cliente sia rifornito da esattamente un punto vendita e che i vincoli di capacità siano rispettati, minimizzando i costi complessivi sostenuti dai punti vendita (costi di servizio più eventuali penalità legate al grado di (scarso) soddisfacimento dei clienti).

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il cliente } i \text{ è assegnato al punto vendita } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se il punto vendita } j \text{ pagherà la penale,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 1, \dots, m.$$

Utilizzando tali variabili booleane si può proporre la seguente formulazione per il problema di *Sat*:

$$\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} p_j y_j & \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, \dots, n \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le u_j & j = 1, \dots, m \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_{ij}x_{ij} \ge S(1 - y_j) & j = 1, \dots, m \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \dots, n, \ \ j = 1, \dots, m \\
& y_j \in \{0, 1\} & j = 1, \dots, m
\end{array}$$

Il primo blocco di vincoli stabilisce che ogni cliente sia assegnato ad esattamente un punto vendita. Il secondo gruppo di vincoli rappresenta i vincoli di capacità relativi ai punti vendita. Il terzo gruppo di vincoli stabilisce che il punto vendita j dovrà pagare la penale (e la corrispondente y_j dovrà assumere il valore 1) se e solo se il soddisfacimento totale dei clienti assegnati a j, $\sum_{i=1}^{n} s_{ij}x_{ij}$, risulterà minore di S. Infine la funzione obiettivo, da minimizzare, è la somma dei costi di servizio e dei costi di penalità.