RICERCA OPERATIVA (a.a. 2011/12)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: $\boxed{\text{L-31}}$ $\boxed{26}$ $\boxed{\text{Sp}}$ **Matricola:**

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & & & & \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -6 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \leq & 4
\end{array}
$$

Utilizzando le condizioni degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (4, 2)$ sia ottima per il problema. Inoltre, si specifichi se $\bar{x}$ sia una soluzione di base, e si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$
(P)\ \begin{array}{l} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D)\ \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}
$$

il teorema forte della dualità ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per (P). Allora, $\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (D) complementare a $\bar{x}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verifichino le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$
(P)\ \begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & & & & \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -6 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \leq & 4
\end{array}
\qquad
(D)\ \begin{array}{rrcrcrcrcr}
\min & & - & 6y_2 & + & 2y_3 & + & 4y_4 & & \\
 & & - & 2y_2 & & & + & y_4 & = & 1 \\
 & -y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 0 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (4, 2)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\overline{x}$ è $I(\overline{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\overline{x} = 0\} = \{2, 3, 4\}$. Di conseguenza, una soluzione duale $\overline{y}$, tale che $\overline{y}A = c$, che formi con $\overline{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\overline{y}_1 = 0$. Affinché $\overline{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$
\begin{cases}
\begin{array}{rcrcrl}
-2y_2 & & & + & y_4 & = 1 \\
y_2 & + & y_3 & & & = 0 \\
y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq 0
\end{array}
\end{cases}
$$

Posto $y_4 = \alpha$, il sistema di equazioni ammette infinite soluzioni della forma $((\alpha - 1)/2, (1 - \alpha)/2, \alpha)$. L'unica di tali soluzioni avente componenti non negative è $(0, 0, 1)$, ottenuta fissando $\alpha = 1$. Pertanto, $\overline{y} = (0, 0, 0, 1)$ è una soluzione ammissibile per (D). Poichè $\overline{y}$ soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\overline{x}$, $\overline{x}$ è una soluzione ottima per (P), e $\overline{y}$ è una soluzione ottima per (D). Inoltre, poichè $\overline{y}$ è l'unica soluzione ammissibile per (D) che soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\overline{x}$, segue anche che $\overline{y}$ è l'unica soluzione ottima di (D). Infine, poichè la sottomatrice dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è di rango massimo (la matrice identità è una sua sottomatrice), segue che $\bar{x}$ è una soluzione di base (ammissibile, come già verificato).

2) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & 2x_1 & & & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1 & & & \leq & 4 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 4
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. Si discuta l'eventuale degenerazione primale e duale delle basi visitate. Al termine, utilizzando le condizioni degli scarti complementari, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema dato, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{3,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}, \ y_N = 0, \ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = 3, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{1, 2\},$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi, \ \ \lambda_1 = 0, \ \ \lambda_2 = 2, \ \ \bar{\lambda} = \min\{\lambda_i \ : \ i \in J\} = 0,$$

$$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = 1 \ \ \text{[cambio di base degenere]}$$

[soluzione di base primale degenere e duale non degenere]

it.2) $B = \{1,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}, \ y_N = 0, \ y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ h = 4, \ B(h) = 2,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$J = \{2\}, \ \ \bar{\lambda} = \lambda_2 = 2, \ \ k = 2$$

[soluzione di base primale degenere e duale non degenere]

it.3) $B = \{1,2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}, \ y_N = 0, \ y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \ \text{STOP.}$$

[soluzione di base primale non degenere e duale degenere]

Poiché $y_B \geq 0$ segue che $x = (4, 2)$ è una soluzione ottima per (P), mentre $y = (0, 2, 0, 0)$ è una soluzione ottima per (D). Poiché la soluzione ottima duale individuata dall'algoritmo ha $y_2 > 0$, per le condizioni degli scarti complementari il secondo vincolo di (P) deve essere attivo in una qualsiasi soluzione ammissibile per (P) in scarti complementari con $y = (0, 2, 0, 0)$, ovvero in qualsiasi soluzione ottima primale. Ovvero, deve essere $x_1 = 4$. Sostituendo $x_1 = 4$ nei restanti tre vincoli di (P), si ottiene che ogni soluzione ammissibile per (P) avente $x_1 = 4$ deve soddisfare $x_2 \leq 2$. L'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema dato è pertanto costituito dall'insieme delle soluzioni $(4, \alpha)$, con $\alpha \leq 2$.

3) Si risolva il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & & & x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 6\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 6\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad k = \min\{\, i \in N : A_i \bar{x} > b_i \,\} = \min\{2, 5\} = 2$$

[regola anticiclo di Bland]

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \bar{\theta} = \min\{\, \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0 \,\} = 1/2,$$

$$h = \min\{\, i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i \,\} = 1$$

it. 2) $B = \{2, 6\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP: } \bar{x} \text{ e } \bar{y} \text{ sono ottime.}$$

4) La società GARBAGE, specializzata nello smaltimento di rifiuti solidi urbani, decide di aprire k discariche per smaltire i rifiuti provenienti da n comuni. GARBAGE conosce il numero medio (in tonnellate) di rifiuti, r_i, che ogni comune i deve smaltire ogni giorno, $i = 1, ...n$. Individua pertanto m ($m > k$) siti candidati all'apertura di una discarica, e stima pari a u_j la capacità di smaltimento giornaliera di una discarica costruita in j, e pari a c_j il costo di apertura di una discarica in j, $j = 1, ...m$.

Per limitare i disagi subiti dagli abitanti della zona interessata all'apertura delle discariche, GARBAGE decide di aprire le k discariche in modo da massimizzare la minima distanza intercorrente tra le coppie di discariche aperte (è nota la distanza $d_{j,h}$ tra ogni coppia (j, h) di siti candidati all'apertura di una discarica). Sapendo che GARBAGE ha a disposizione un budget B per sostenere i costi di apertura delle discariche, si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere dove aprire le k discariche, e come assegnare i comuni alle discariche aperte (ogni comune deve essere assegnato ad esattamente una discarica), in modo da non eccedere la capacità di smaltimento delle discariche, rispettare il vincolo di budget, e massimizzare la minima distanza intercorrente tra le coppie di discariche aperte.

SVOLGIMENTO Per descrivere il problema introduciamo le variabili di localizzazione

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se viene aperta una discarica nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, ..m.$$

Per decidere come assegnare i comuni alle discariche introduciamo inoltre le variabili di assegnamento

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il comune } i \text{ viene assegnato alla discarica in } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, ..n, j = 1, ..m.$$

Introduciamo infine una variabile ausiliaria D (variabile di soglia), per stimare per difetto la distanza intercorrente tra ogni coppia di discariche aperte. Utilizzando tali variabili decisionali, il problema di GARBAGE può essere formulato mediante il seguente modello P.L.I:

$$\begin{array}{lll}
\max & D & \\
& \sum_{j=1}^{m} y_j = k & \\
& \sum_{j=1}^{m} c_j y_j \leq B & \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, ...n \\
& \sum_{i=1}^{n} r_i x_{ij} \leq u_j y_j & j = 1, ...m \\
& d_{jh} + M(2 - y_j - y_h) \geq D & j, h = 1, ...m \\
& y_j \in \{0, 1\} & j = 1, ...m, \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, ..n, \; j = 1, ...m.
\end{array}$$

Il primo vincolo garantisce che vengano aperte esattamente k discariche, mentre il secondo garantisce il soddisfacimento del vincolo di budget. Il successivo blocco di vincoli, di semiassegnamento, garantisce che ogni comune sia assegnato ad esattamente una discarica. Segue un gruppo di vincoli che sono contemporaneamente vincoli logici e vincoli di capacità. Infatti, se $y_j = 1$, ovvero si decide di aprire una discarica in j, allora il vincolo corrispondente a j garantisce che la capacità di smaltimento u_j relativa a j non venga superata. Se invece $y_j = 0$, ovvero si decide di non aprire una discarica in j, allora il vincolo forza a 0 tutte le variabili di assegnamento relative a j, impedendo in tal modo l'assegnamento di comuni al sito j. Infine l'ultimo blocco di vincoli, in cui M denota una costante molto elevata (ad esempio pari alla massima distanza tra le coppie di siti candidati all'apertura di una discarica), garantisce che D sia una stima per difetto della minima distanza intercorrente tra le coppie di discariche aperte. Massimizzando D, a livello di soluzione ottima D risulterà uguale alla distanza minima tra le coppie di discariche aperte, che verrà pertanto massimizzata.