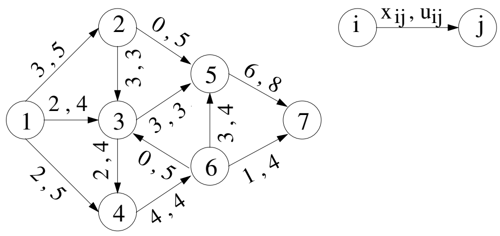
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2011/12)

Nome Cognome:

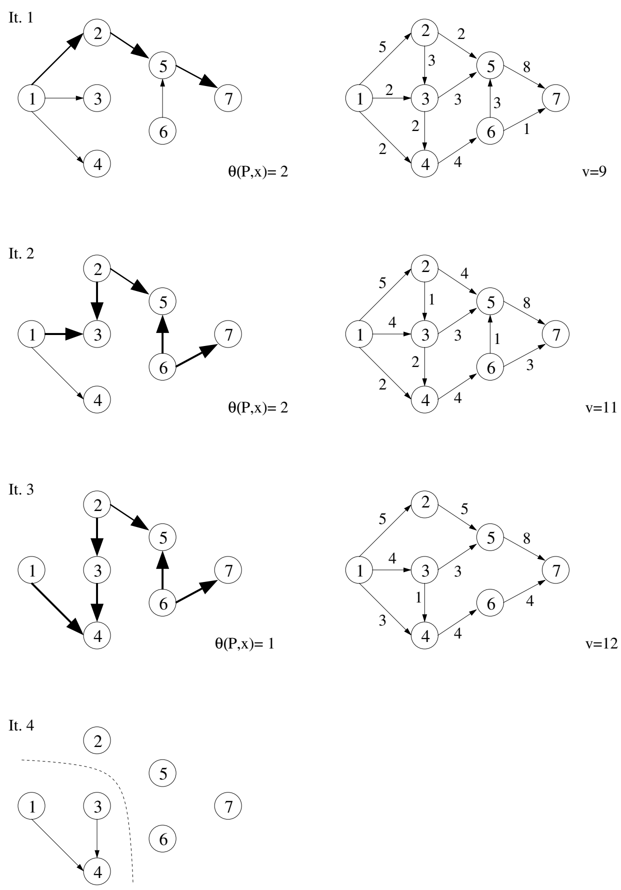
Corso di Laurea: L-31 26 Sp **Matricola:**

1) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato in figura, di valore $v = 7$. Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. È possibile aumentare il valore del flusso massimo aumentando la capacità dell'arco $(5, 7)$? Giustificare la risposta.



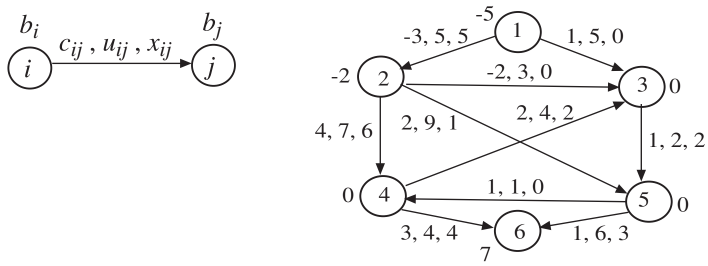
SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, evidenziando il cammino aumentante P; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando gli archi a flusso nullo.



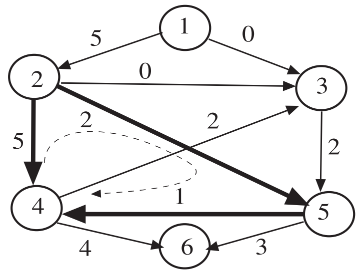
Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo, e il taglio $N_s = \{1, 3, 4\}$, $N_t = \{2, 5, 6, 7\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 5 + 3 + 4 = 12$. Poiché $(5, 7)$ non è un arco diretto del taglio di capacità minima individuato, non è possibile aumentare il valore del flusso massimo aumentando la capacità di $(5, 7)$.

2) Si risolva il problema di flusso di costo minimo per l'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato, di costo $cx = 32$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, ed il flusso ottenuto dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che il flusso ottenuto è ottimo, e si discuta se è l'unico flusso ottimo, giustificando la risposta.

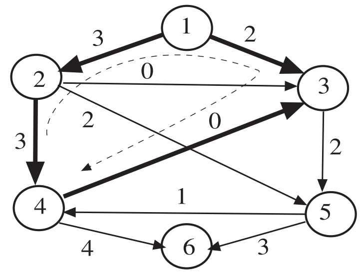


SVOLGIMENTO

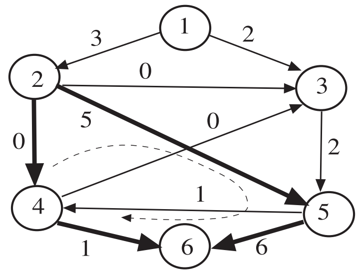
L'algoritmo esegue quattro iterazioni, illustrate dalle prime quattro figure: in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi evidenziati) con il il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La figura in basso a destra mostra il grafo residuo relativo all'ultimo flusso individuato ed un albero dei cammini minimi (archi in neretto) relativo ad un nodo radice fittizio (non mostrato in figura) collegato a costo zero a tutti i nodi del grafo. Le relative etichette associate ai nodi soddisfano quindi le condizioni di ottimalità di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli aumentanti di costo negativo nel grafo residuo, e pertanto l'ultimo flusso individuato è ottimo. Tale flusso è anche l'unica soluzione ottima del problema, in quanto nel grafo residuo non esistono cicli di costo nullo, come si può facilmente verificare dal fatto che nessuno degli archi esterni all'albero dei cammini minimi (a parte quelli inversi agli archi dell'albero) soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza. Si noti che le coppie di archi "inversi" nel grafo residuo, corrispondenti ad archi non saturi e non vuoti nella soluzione ottima, individuano in realtà cicli orientati di costo nullo, ma tali cicli non corrispondono a possibili modifiche della soluzione corrente.



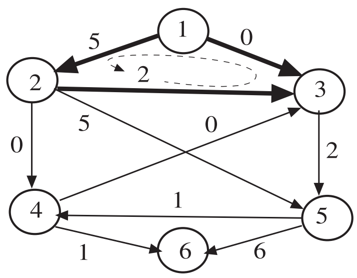
$\theta = 1$, c(C) = -1, $cx = 31$



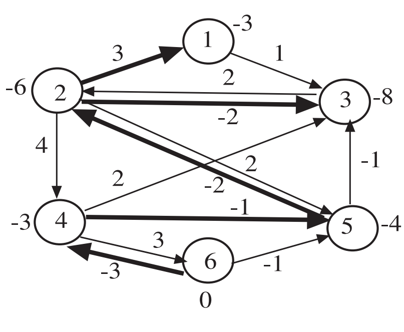
$\theta = 2$, c(C) = -2, $cx = 27$



$\theta = 3$, c(C) = -4, $cx = 15$



$\theta = 2$, c(C) = -6, $cx = 3$



3) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima duale individuata sia unica, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

$$\text{it. 1) } B = \{2,3\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{\, i \in N : A_i \bar{x} > b_i \,\} = \min\{\, 4, 5 \,\} = 4 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\theta} = \min\{\, \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0 \,\} = 1/2, \quad h = \min\{\, i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i \,\} = 3$$

$$\text{it. 2) } B = \{2,4\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = 5,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 1/3, \quad h = 2$$

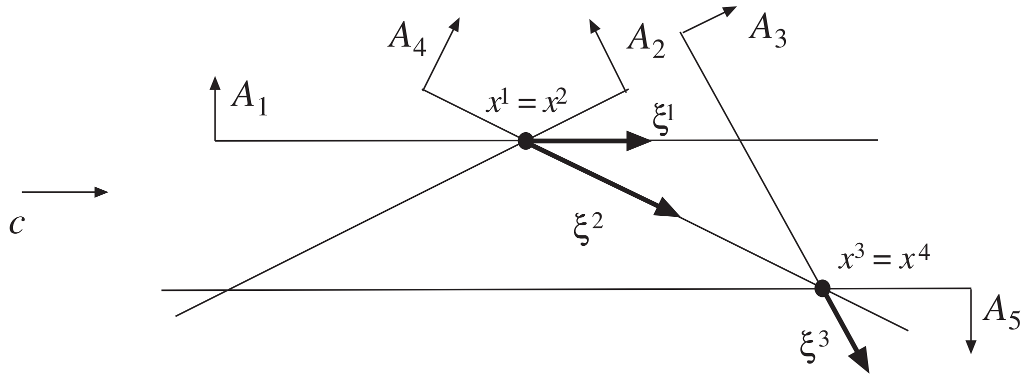
$$\text{it. 3) } B = \{4,5\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \textit{STOP.}$$

$B = \{4, 5\}$ è una base ottima: $\bar{x} = (2, 0)$ è una soluzione ottima per il problema primale, mentre $\bar{y} = (0, 0, 0, 2/3, 1/3)$ è una soluzione ottima per il problema duale. Osserviamo che la soluzione ottima primale individuata dall'algoritmo è degenere in quanto $I(\bar{x}) = \{1, 3, 4, 5\}$. Consideriamo $A_1 A_B^{-1} = (-1/3, -5/3)$ e la corrispondente direzione $d = (1, 0, 0, -1/3, -5/3)$. Per via della degenerazione primale, abbiamo $db = b_1 - A_1 \bar{x} = 0$. Nel caso d risulti una direzione ammissibile, la soluzione ottima duale individuata dall'algoritmo non è unica, in quanto effettuando uno spostamento a partire da $\bar{y}$ lungo d il valore della funzione obiettivo del problema duale risulta invariato. In effetti, d è una direzione ammissibile, e lungo tale direzione è possibile uno spostamento illimitato (avendo $A_1 A_B^{-1}$ componenti non positive). Quindi, $\bar{y} = (0, 0, 0, 2/3, 1/3)$ non è l'unica soluzione ottima del problema duale.

4) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, in caso di ottimo finito, si discuta l'unicità delle soluzioni ottime, primale e duale, individuate dall'algoritmo.



SVOLGIMENTO

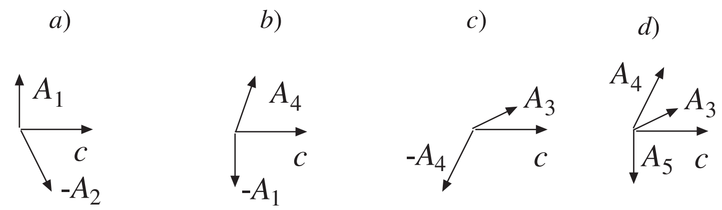
it. 1) $B = \{1, 2\}$, $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_2$, come mostrato in a); quindi, $h = 2$. La base è primale degenere, in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 4\}$, ma duale non degenere. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza del vincolo 4, che è attivo (ma non in base): quindi $k = 4$, e si esegue un cambio di base degenere.

it. 2) $B = \{1, 4\}$, $y_1 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e A_4, come mostrato in b); quindi, $h = 1$. La base è quindi duale non degenere, mentre resta ovviamente primale degenere in quanto $x^2 = x^1$ implica $I(x^2) = I(x^1)$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 3 e 5, quindi $k = \min\{3, 5\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. Il cambio di base è pertanto non degenere.

it. 3) $B = \{3, 4\}$, $y_3 > 0$ e $y_4 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_3 e $-A_4$, come mostrato in c); quindi, $h = 4$. La base è primale degenere, in quanto $I(x^3) = \{3, 4, 5\}$, ma duale non degenere. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza del vincolo 5, che è attivo (ma non in base): quindi $k = 5$, e si esegue un ulteriore cambio di base degenere.

it. 4) $B = \{3, 5\}$, $y_3 > 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_3 e A_5, come mostrato in d); pertanto l'algoritmo termina. La base è quindi duale non degenere, mentre resta ovviamente primale degenere in quanto $x^4 = x^3$ implica $I(x^4) = I(x^3)$.

La soluzione ottima primale individuata dall'algoritmo è unica, in quanto non esistono facce del poliedro (di dimensione maggiore di zero) incidenti nel vertice corrispondente a tale soluzione ottima e perpendicolari al gradiente c della funzione obiettivo. Invece la soluzione ottima duale non è unica; ciò si può verificare mediante la figura d), in quanto esistono basi alternative (ad esempio $B' = \{4, 5\}$) che individuano la stessa soluzione ottima primale ma una diversa soluzione ammissibile duale (e quindi anch'essa ottima per il problema duale).



5) L'agenzia per lo sviluppo energetico *Energie* deve aprire p centrali elettriche in una regione della Francia. Individua pertanto un insieme J di siti candidati all'apertura di una centrale, con $|J| \geq p$. L'agenzia censisce inoltre l'insieme I dei principali centri abitati della regione, e stima le distanze d_{ij} intercorrenti tra il centro abitato i e il sito candidato j, $\forall i \in I, j \in J$.

Tenendo conto che, per ogni centro abitato i, la centrale elettrica *critica* per i è la centrale più vicina a i tra quelle aperte, si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere dove aprire le p centrali elettriche in modo da massimizzare la minima distanza intercorrente tra un centro abitato e la centrale elettrica critica per tale centro abitato.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema introduciamo le variabili binarie

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'agenzia per lo sviluppo energetico decide di aprire una centrale elettrica nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j \in J.$$

Introduciamo inoltre una variabile ausiliaria z per stimare la minima distanza centro abitato - centrale critica. Utilizzando tali variabili decisionali il problema di *Energie* può essere formulato mediante il seguente modello P.L.I:

$$\begin{array}{lll} \max & z & \\ & \sum_{j \in J} x_j = p & \\ & x_j d_{ij} + M(1 - x_j) \geq z & i \in I, j \in J \\ & x_j \in \{0, 1\} & j \in J \\ & z_i \geq 0 & i \in I. \end{array}$$

Il primo vincolo impone che vengano aperte p centrali elettriche. Il secondo blocco di vincoli, in cui M è una costante opportunamente elevata, garantisce che, per ogni centro abitato i, z sia una stima per difetto della distanza intercorrente tra i e la relativa centrale elettrica critica (la più vicina a i). Infatti, se $x_j = 1$, ovvero in j è stata aperta una centrale elettrica, il vincolo relativo al centro abitato i garantisce che sia $z \leq d_{ij}$. Se invece $x_j = 0$, il vincolo risulta sempre soddisfatto se M viene scelta adeguatamente. Ad esempio, M può essere scelta uguale alla massima distanza tra i centri in I e i siti in J, ovvero $M = \max_{i \in I, j \in J} d_{ij}$. Alternativamente, è possibile scegliere una costante distinta M_i per ogni i, pari a $\max_{j \in J} d_{ij}$. Si noti che, stimando z per difetto la distanza tra i e la sua centrale critica per ogni i, z stima anche per difetto la minima di tali distanze.

Poiché la funzione obiettivo, da massimizzare, è z, a livello di soluzione ottima z risulterà uguale alla minima distanza intercorrente tra un centro abitato e la relativa centrale critica, che verrà pertanto massimizzata.