RICERCA OPERATIVA (a.a. 2012/13)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: L-31 26 Sp **Matricola:**

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & \alpha x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \end{array}$$

Si determini per quali valori del parametro reale α la soluzione $\bar{x} = (1, 2)$ sia ottima per il problema. Inoltre, si specifichi se $\bar{x}$ sia una soluzione di base, discutendone l'eventuale degenerazione, e si individui, al variare del parametro α, l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \begin{array}{c} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

il teorema forte della dualità ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per (P). Allora, $\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (D) complementare a $\bar{x}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verifichino le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcl} \max & \alpha x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 5y_1 & + & y_2 & & & & & & \\ & y_1 & - & y_2 & & & - & y_4 & = & \alpha \\ & 2y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (1, 2)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{1, 2\}$. Di conseguenza, una soluzione duale $\overline{y}$, tale che $\overline{y}A = c$, che formi con $\overline{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\overline{y}_3 = \overline{y}_4 = 0$. Affinché $\overline{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcll} y_1 & - & y_2 & = \alpha \\ 2y_1 & + & y_2 & = 1 \\ y_1, & y_2 \geq 0, & y_3 = y_4 & = 0 \end{array} \right.$$

Fissato α, il sistema di equazioni ammette l'unica soluzione $(\frac{\alpha+1}{3}, \frac{-2\alpha+1}{3})$. $\bar{y}(\alpha) = (\frac{\alpha+1}{3}, \frac{-2\alpha+1}{3}, 0, 0)$ ha componenti non negative se e solo se $-1 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. Pertanto $\bar{x}$ è soluzione ottima di (P) per $-1 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ e, fissato α in tale intervallo, $\bar{y}(\alpha)$ è l'unica soluzione ottima di (D). Infine, poichè la sottomatrice dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è di rango massimo e di ordine 2, segue che $\bar{x}$ è una soluzione di base non degenere (ammissibile, come già verificato).

2) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{4, 5\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. Si discuta l'eventuale degenerazione primale e duale delle basi visitate. Nel caso di ottimo finito, la soluzione ottima primale individuata dall'algoritmo è unica? Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{4, 5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$y_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = 5, \quad B(h) = 2,$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{1, 2, 3\},$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 0, \quad \bar{\lambda} = \min\{\lambda_i \; : \; i \in J\} = 0,$$

$$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = 3 \text{ [cambio di base degenere]}$$

[soluzione di base primale degenere e duale non degenere]

it.2) $B = \{3, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 4, \quad B(h) = 2,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{1, 2\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad k = \min\{1, 2\} = 1 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

[soluzione di base primale degenere e duale non degenere]

it.3) $B = \{1, 3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$y_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

[soluzione di base primale degenere e duale degenere]

Poiché $y_B \geq 0$ segue che $x = (-1, 0)$ è una soluzione ottima per (P), mentre $y = (1, 0, 0, 0, 0)$ è una soluzione ottima per (D). Poiché la soluzione ottima duale individuata dall'algoritmo ha $y_1 > 0$, per le condizioni degli scarti complementari il primo vincolo di (P) deve essere attivo in una qualsiasi soluzione ammissibile per (P) in scarti complementari con $y = (1, 0, 0, 0, 0)$, ovvero in qualsiasi soluzione ottima primale. Ovvero, deve essere $-x_1 - x_2 = 1$. Sostituendo $x_2 = -x_1 - 1$ nei restanti vincoli di (P), si ottiene come unica soluzione $x = (-1, 0)$, che pertanto è l'unica soluzione ottima di (P).

3) Si risolva il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & & - & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Nel caso di ottimo finito, si indichi la coppia di soluzioni ottime restituite dall'algoritmo. Altrimenti, si determini una direzione di decrescita tale che il problema duale risulti illimitato e si specifichi cosa si può concludere riguardo al problema primale.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{3, 4\} = 3$$

[regola anticiclo di Bland]

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = \min\{6\} = 6,$$

$$h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\ \} = \min\{1\} = 1$$

it. 2) $B = \{2, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad k = 4$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \textit{STOP.}$$

Poichè $\eta_B \leq 0$, segue che il problema duale è inferiormente illimitato, e quindi il problema primale è vuoto. La direzione implicitamente individuata dall'algoritmo è $d = (0, -\eta_B, 1)$, ovvero $(0, 1, 1, 1)$. d è una direzione di decrescita per il problema duale in quanto il prodotto di d con il vettore dei costi del problema duale, ovvero $(1, 1, -1, -1)$, è negativo (vale infatti -1).

4) Il comune di Pisa decide di istituire un servizio di assistenza domiciliare per persone in difficoltà, denominato *Home*. Dopo una fase di selezione delle richieste pervenute, *Home* individua n cittadini da assistere mediante m operatori socio-sanitari. Il cittadino i necessita di una tipologia di assistenza che richiede un tempo di servizio stimato pari a t_i ore, $i = 1, ...n$. L'operatore j, per proprie regole contrattuali, deve lavorare al massimo per U_j ore al giorno; l'operatore j, inoltre, ha la facoltà di segnalare il sottoinsieme $P(j)$ di cittadini che preferirebbe assistere, $j = 1, ...m$.

Home definisce il *coefficiente di utilizzo* dell'operatore j come il tempo totale di servizio giornaliero di j (espresso come somma dei tempi di servizio dei cittadini assegnati a j) diviso la durata lavorativa giornaliera U_j, e si pone l'obiettivo di assegnare gli n cittadini individuati agli m operatori secondo un criterio di equità, ovvero minimizzando il massimo coefficiente di utilizzo degli operatori.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di assegnare gli n cittadini agli m operatori in modo che ogni cittadino sia assegnato ad esattamente un operatore, la durata massima di lavoro di ogni operatore sia rispettata, e le preferenze degli operatori siano soddisfatte, in modo tale da minimizzare il massimo coefficiente di utilizzo degli operatori.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema introduciamo le variabili di assegnamento

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il cittadino } i \text{ viene assegnato all'operatore } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, ..m, i \in P(j).$$

Introduciamo inoltre una variabile ausiliaria z (variabile di soglia), per stimare il massimo coefficiente di utilizzo degli operatori. Utilizzando tali variabili decisionali il problema del servizio di assistenza *Home* può essere formulato mediante il seguente modello P.L.I:

$$\begin{array}{lll} \min & z & \\ & \displaystyle\sum_{j:\ i \in P(j)} x_{ij} = 1 & i = 1, ...n \\ & \displaystyle\sum_{i \in P(j)} t_i x_{ij} \leq U_j & j = 1, ...m \\ & \displaystyle(\sum_{i \in P(j)} t_i x_{ij})/U_j \leq z & j = 1, ...m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & j = 1, ...m,\ i \in P(j). \end{array}$$

Il primo blocco di vincoli, di semiassegnamento, garantisce che ognuno degli n cittadini sia assegnato ad esattamente un operatore. Il secondo blocco di vincoli garantisce sia il rispetto della durata massima lavorativa degli operatori, che il soddisfacimento delle preferenze da loro espresse. Il terzo blocco di vincoli garantisce che z sia una stima per eccesso del coefficiente di utilizzo di ogni operatore. Minimizzando z, a livello di soluzione ottima z risulterà uguale al coefficiente di utilizzo massimo, che verrà pertanto minimizzato.