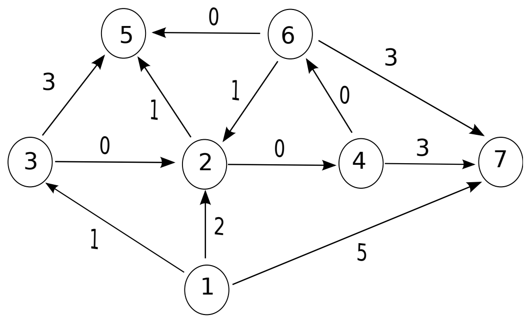
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2012/13)

Nome Cognome:

Corso di Laurea: L-31 26 Sp **Matricola:**

1) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura.



Si utilizzi l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Nel caso in cui il costo dell'arco $(6, 5)$ fosse un parametro reale ϵ (anzichè valere 0, come in figura), per quali valori di tale parametro l'albero individuato al passo precedente continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 1? Giustificare la risposta.

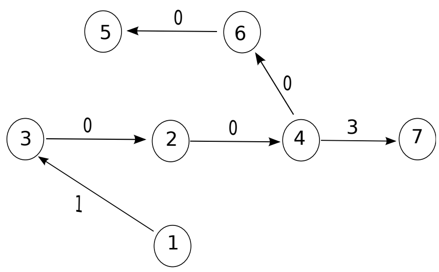
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene il ciclo $(2, 4, 6)$ e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità Q sia implementata come una lista.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31.$

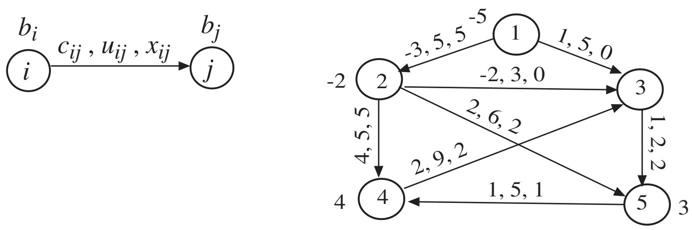
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		*nil*	1	1	1	1	1	1	0	31	31	31	31	31	31	(1)
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	1	0	2	1	31	31	31	5	$(2, 3, 7)$
2	3	*nil*	3	1	1	3	1	1	0	1	1	31	4	31	5	$(2, 5, 7)$
3	2	*nil*	3	1	2	2	1	1	0	1	1	1	2	31	5	$(4, 5, 7)$
4	4	*nil*	3	1	2	2	4	4	0	1	1	1	2	1	4	$(5, 6, 7)$
5	6	*nil*	3	1	2	6	4	4	0	1	1	1	1	1	4	$(5, 7)$
6	5	*nil*	3	1	2	6	4	4	0	1	1	1	1	1	4	(7)
7	7	*nil*	3	1	2	6	4	4	0	1	1	1	1	1	4	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura:



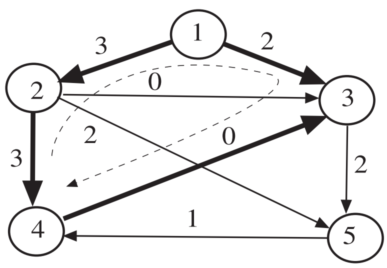
Se il costo dell'arco $(6, 5)$ fosse pari a un parametro reale ϵ, l'etichetta del nodo 5 varrebbe $d[5] = 1 + \epsilon$. L'albero in figura continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 1 per tutti e soli i valori di ϵ che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di ottimalità di Bellman. Considerando i due archi del grafo non appartenenti all'albero ed incidenti il nodo 5, ovvero $(2, 5)$ e $(3, 5)$, si ottiene che l'albero determinato è un albero dei cammini minimi di radice 1 se e solo se $\epsilon \leq 1$.

2) Si risolva il problema di flusso di costo minimo sull'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato, di costo $cx = 16$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.

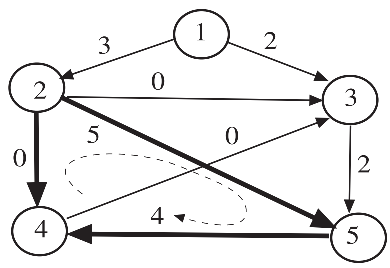


SVOLGIMENTO

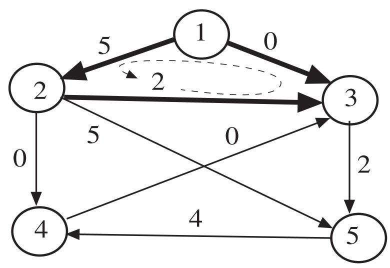
L'algoritmo esegue tre iterazioni, illustrate dalle prime tre figure (in alto, da sinistra a destra): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi evidenziati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La figura in basso mostra invece il grafo residuo relativo all'ultimo flusso individuato ed il corrispondente albero dei cammini minimi (archi evidenziati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.



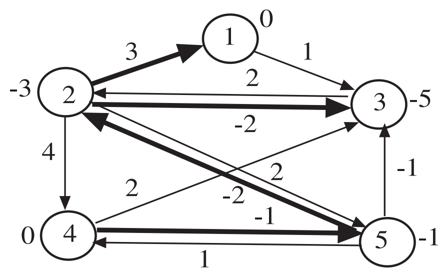
$\theta = 2$, c(C) = -2, $cx = 12$



$\theta = 3$, c(C) = -1, $cx = 9$



$\theta = 2$, c(C) = -6, $cx = -3$



3) Si consideri il seguente problema di P.L., parametrico in $\alpha \in \Re$:

$$
(P_\alpha) \qquad
\begin{array}{rrcrcl}
\max & 3x_1 & - & x_2 & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & \alpha \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & & - & x_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

Si determini per quali valori di α la soluzione di base duale associata alla base $B = \{1, 2\}$ sia ottima per il problema duale, discutendo l'unicità di tale soluzione al variare di α. Si dimostri infine che il problema (P_α) non può essere superiormente illimitato per nessun valore di α. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Consideriamo la matrice di base associata a $B = \{1, 2\}$ e la sua inversa:

$$
A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.
$$

La soluzione di base duale associata a B è quindi data da:

$$
\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Essendo $\bar{y}$ non degenere, $\bar{y}$ è ottima se e solo se la corrispondente soluzione di base primale, ovvero:

$$
\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},
$$

è ammissibile per (P_α). Ciò si verifica se e solo se $2 + 3 \leq \alpha$, ossia per $\alpha \geq 5$.

Per discutere l'unicità della soluzione ottima $\bar{y}$ distinguiamo due casi:

1. $\alpha > 5$: in tal caso $\bar{x}$ è una soluzione di base (ottima) non degenere, e pertanto $\bar{y}$ è l'unica soluzione duale ammissibile in scarti complementari con essa; segue che $\bar{y}$ è l'unica soluzione ottima duale;

2. $\alpha = 5$: in tal caso $\bar{x}$ è una soluzione di base (ottima) degenere, in quanto $I(\bar{x}) = \{1, 2, 3\}$, e quindi potrebbero esistere altre soluzioni duali ammissibili in scarti complementari con $\bar{x}$ (oltre a $\bar{y}$); imponendo tali condizioni, ad esempio, si ricava che la soluzione di base duale ammissibile $y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$, ed è quindi una soluzione ottima duale alternativa a $\bar{y}$.

Infine (P_α) non può essere superiormente illimitato per nessun valore di α. Infatti, il problema duale ammette la soluzione ammissibile $\bar{y}$ indipendentemente dal valore assunto da α, con valore della funzione obiettivo duale pari a $\bar{y}b = 3$, con $b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dal Teorema debole della dualità segue che la funzione obiettivo di (P_α) è superiormente limitata dal valore 3.

4) Si risolva il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ & 2x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & -x_1 & & & \leq & -2 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{4, 6\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{4, 6\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{1, 2, 3\} = 1 \\ \text{[regola anticiclo di Bland]} \end{array}$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = \min\{1, 0\} = 0,$$

[cambio di base duale degenere]

$$h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\ \} = \min\{6\} = 6$$

it. 2) $B = \{1, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 4 \\ -8/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{3\} = 3,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{1\} = 1, \quad h = \min\{4\} = 4$$

it. 3) $B = \{1, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{STOP: } \bar{x} \text{ e } \bar{y} \text{ sono ottime.}$$

5) Il comune di Pisa decide di aprire alcuni presidi per l'assistenza ad anziani, per far fronte alla crescente richiesta. Individua pertanto un insieme J di siti candidati per la costruzione di tali presidi, e stima pari a c_j il costo da sostenere per costruire un presidio nel sito j, $j \in J$. Individua inoltre l'insieme dei quartieri I che necessitano del servizio di assistenza ad anziani e, in particolare, stima pari ad a_i il numero di anziani del quartiere i che necessitano del servizio, $i \in I$.

Gli assessori preposti al servizio valutano che 15 minuti sia il tempo di viaggio adeguato per il servizio; in altri termini, il tempo che un anziano dovrebbe impiegare per recarsi dal proprio quartiere ad un presidio, ove ricevere assistenza, non dovrebbe eccedere 15 minuti. Il comune di Pisa ha però un budget limitato, pari a B. Decide quindi di costruire presidi, compatibilmente con il budget disponibile, in modo da massimizzare il numero di anziani che riusciranno a recarsi presso un presidio di assistenza entro tale limite temporale, ovvero entro 15 minuti. Per garantire un servizio accettabile per tutti, si stabilisce inoltre che ogni anziano debba comunque potersi recare presso almeno uno dei presidi aperti entro 30 minuti.

Dati i sottoinsiemi $D_{15}(i)$ e $D_{30}(i)$ che specificano, per ogni quartiere i, i siti in J la cui distanza temporale da i è ≤ 15 minuti e ≤ 30 minuti, rispettivamente, si formuli in termini di PLI il problema di decidere in quali siti di J costruire i presidi rispettando il vincolo di budget e garantendo che ogni anziano possa recarsi presso almeno uno dei presidi aperti entro 30 minuti, con l'obiettivo di massimizzare il numero di anziani che riusciranno a recarsi presso un presidio entro 15 minuti.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema introduciamo le variabili binarie

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se viene aperto un presidio nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j \in J.$$

Introduciamo inoltre le variabili binarie

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{se il quartiere } i \text{ ha una distanza temporale} \leq 15 \text{ min da almeno un presidio aperto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in I.$$

Utilizzando tali variabili decisionali, il problema del comune di Pisa può essere formulato mediante il seguente modello PLI:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{i \in I} a_i z_i & \\ & \sum_{j \in J} c_j y_j \leq B & \\ & \sum_{j \in D_{30}(i)} y_j \geq 1 & i \in I \\ & \sum_{j \in D_{15}(i)} y_j \geq z_i & i \in I \\ & y_j \in \{0,1\} & j \in J \\ & z_i \in \{0,1\} & i \in I. \end{array}$$

Il primo vincolo è il vincolo di budget. Tale vincolo impone che il costo totale di costruzione dei presidi non ecceda il budget disponibile B. Il secondo blocco è costituito da classici vincoli di copertura: per ogni quartiere i, si impone che almeno uno dei presidi aperti disti da i non più di 30 minuti. Tali vincoli quindi garantiscono che ogni anziano possa recarsi presso almeno uno dei presidi aperti entro 30 minuti.

Il terzo blocco di vincoli è costituito da vincoli di copertura e vincoli logici. Per ogni quartiere i, se nessun presidio è raggiungibile da i entro 15 minuti, allora $\sum_{j \in D_{15}(i)} y_j = 0$, e ciò forza la variabile z_i a 0. Se invece almeno un presidio è raggiungibile da i entro 15 minuti, allora $\sum_{j \in D_{15}(i)} y_j$ è un intero ≥ 1. In questo caso z_i può assumere sia il valore 0 che il valore 1. A livello di soluzione ottima, tuttavia, poichè la funzione obiettivo, da massimizzare, è $\sum_{i \in I} a_i z_i$, in tale secondo caso z_i assumerà correttamente il valore 1, segnalando che il quartiere i ha una distanza temporale ≤ 15 min da almeno un presidio, e conteggiando gli anziani del quartiere i nel gruppo di anziani che riescono a recarsi presso un presidio nel tempo ritenuto più adeguato, ovvero entro 15 minuti.