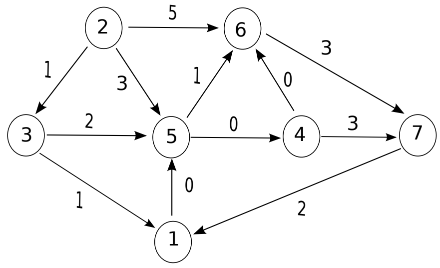
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2013/14)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura



utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Nel caso in cui il costo dell'arco $(6,7)$ fosse un parametro reale ϵ (anzichè valere 3, come in figura), per quali valori di tale parametro l'albero individuato al passo precedente continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2? E per quali valori di ϵ l'albero ottimo determinato sarebbe unico? Giustificare le risposte.

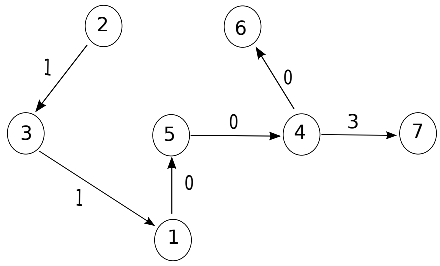
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene il ciclo $(1,5,6,7)$ e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità Q sia implementata come una lista.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31$.

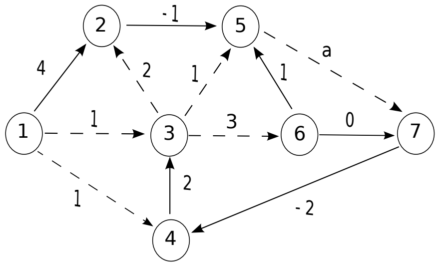
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		2	*nil*	2	2	2	2	2	31	0	31	31	31	31	31	$\{2\}$
1	2	2	*nil*	2	2	2	2	2	31	0	1	31	3	5	31	$\{5,3,6\}$
2	3	3	*nil*	2	2	2	2	2	2	0	1	31	3	5	31	$\{1,5,6\}$
3	1	3	*nil*	2	2	1	2	2	2	0	1	31	2	5	31	$\{5,6\}$
4	5	3	*nil*	2	5	1	5	2	2	0	1	2	2	3	31	$\{4,6\}$
5	4	3	*nil*	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	$\{6,7\}$
6	6	3	*nil*	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	$\{7\}$
7	7	3	*nil*	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura:



Se il costo dell'arco $(6,7)$ fosse pari a un parametro reale ϵ, l'albero in figura continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2 per tutti e soli i valori di ϵ che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di ottimalità di Bellman, ovvero per tutti e soli i valori di ϵ tali che $d[6] + \epsilon \geq d[7]$. Segue che l'albero determinato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2 se e solo se $\epsilon \geq 3$. Poichè per $\epsilon = 3$ le condizioni di Bellman relative all'arco $(6,7)$ sono soddisfatte in forma di uguaglianza, mentre per i restanti archi non appartenenti all'albero sono soddisfatte in forma di disuguaglianza stretta, segue inoltre che l'albero determinato è l'unico albero dei cammini minimi di radice 2 per tutti e soli i valori di $\epsilon > 3$. In particolare, per $\epsilon = 3$ l'albero ottimo alternativo si ottiene inserendo l'arco $(6,7)$ al posto di $(4,7)$.

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, ed in particolare l'albero T evidenziato, dove a denota un parametro a valori reali.



Si discuta per quali valori del parametro a:

1. T è un albero dei cammini minimi di radice 1;
2. T è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1;
3. il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura risulta essere inferiormente illimitato.

Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

1. Associamo ad ogni nodo i un'etichetta $d[i]$ che rappresenti il costo dell'unico cammino in T dal nodo radice 1 a i:

   $d[1] = 0$, $d[2] = 3$, $d[3] = 1$, $d[4] = 1$, $d[5] = 2$, $d[6] = 4$, $d[7] = 2 + a$.

   T è un albero dei cammini minimi di radice 1 per tutti e soli i valori di a per cui gli archi non appartenenti a T soddisfano le condizioni di Bellman, ovvero $d[i] + c_{ij} \geq d[j]$, $\forall (i, j) \notin T$. Tali condizioni sono soddisfatte per tutti gli archi non incidenti il nodo 7. Per quanto riguarda i due archi non in T incidenti il nodo 7 si ha:

   - $(6, 7)$: $d[6] + 0 \geq d[7]$, ovvero $4 + 0 \geq 2 + a$ se e solo se $a \leq 2$;
   - $(7, 4)$: $d[7] - 2 \geq d[4]$, ovvero $2 + a - 2 \geq 1$ se e solo se $a \geq 1$.

   Segue che T è un albero dei cammini minimi di radice 1 se e solo se $1 \leq a \leq 2$.

2. Dato un valore di a, $1 \leq a \leq 2$, T è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1 se non esistono archi non appartenenti a T che soddisfino le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza, oppure se ne esistono, ma per ognuno di tali archi (i, j), l'inserzione di (i, j) in T, e la conseguente eliminazione da T dell'unico arco entrante in j, determina una struttura che non è un albero. Osserviamo che l'arco $(2, 5)$, non appartenente a T, soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza: $d[2] - 1 = 3 - 1 = d[5] = 2$. Inoltre, inserendo $(2, 5)$ in T, e rimuovendo $(3, 5)$, si ottiene ancora un albero. Segue che, per nessun valore di a, T è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1.

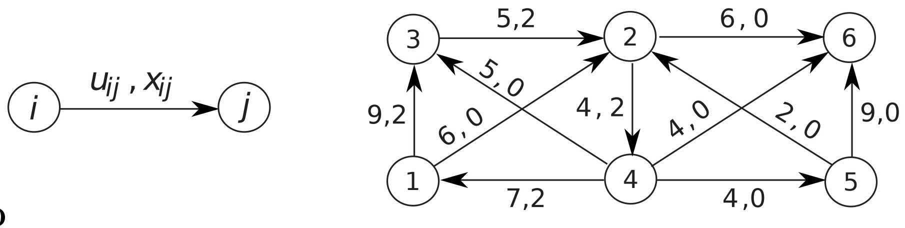
   Si osservi che per $a = 2$ anche l'arco $(6, 7)$ soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza, e può sostituire $(5, 7)$ in T. Analogamente, per $a = 1$, l'arco $(7, 4)$ soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza, e può sostituire $(1, 4)$ in T.

3. Il problema dell'albero dei cammini minimi risulta essere inferiormente illimitato nel caso in cui siano presenti cicli orientati di costo negativo. Nel caso specifico, per ispezione si può verificare che il grafo contiene quattro cicli orientati:

   - $(4, 3, 6, 7)$, di costo 3;
   - $(4, 3, 6, 5, 7)$, di costo $4 + a$;
   - $(4, 3, 5, 7)$, di costo $1 + a$;
   - $(4, 3, 2, 5, 7)$, di costo $1 + a$.

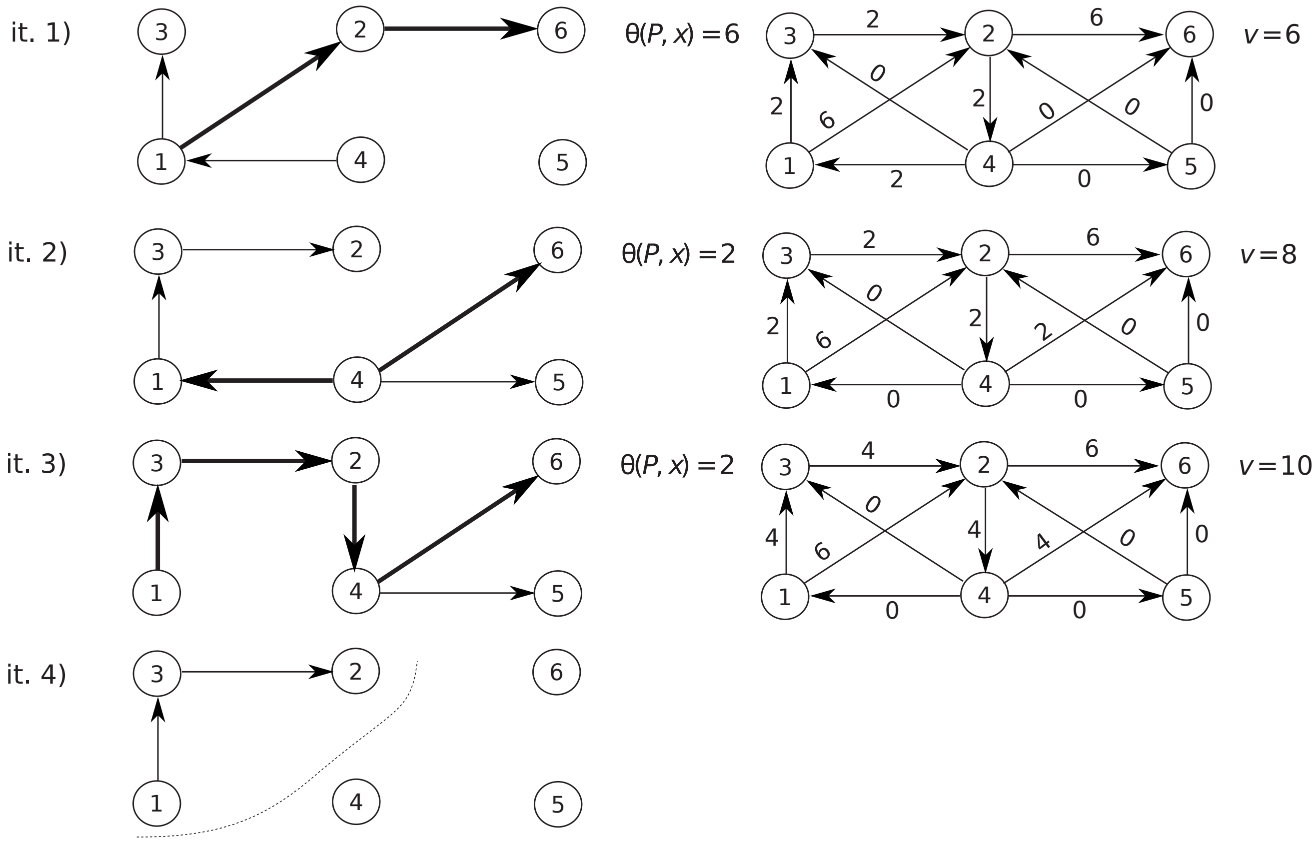
   Segue che il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura risulta essere inferiormente illimitato per $a < -1$.

3) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato in figura di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità. Si discuta infine come cambierebbero le risposte se l'arco $(3, 2)$ avesse capacità $u_{32} = 4$.



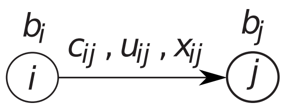
SVOLGIMENTO

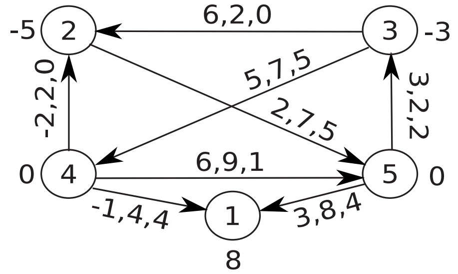
Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita ed il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, pari alla capacità $\theta(P, x)$, col relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$ determinato, che è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = 6 + 4 = 10 = v$.



Se l'arco $(3, 2)$ avesse capacità $u_{32} = 4$, tutti i passi dell'algoritmo rimarrebbero gli stessi tranne l'ultimo, nel quale il taglio determinato sarebbe invece $(N'_s, N'_t) = (\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\})$, ancora di capacità minima $u(N'_s, N'_t) = 10$. Pertanto, la soluzione determinata dall'algoritmo del problema di flusso massimo rimarrebbe la stessa, mentre quella del problema del taglio di capacità minima sarebbe diversa (anche se chiaramente (N_s, N_t) rimarrebbe una soluzione ottima alternativa).

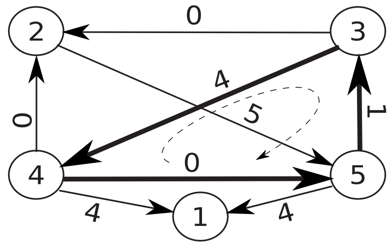
4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo relativamente all'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato di costo $cx = 55$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima, e si discuta se è unica, giustificando la risposta.



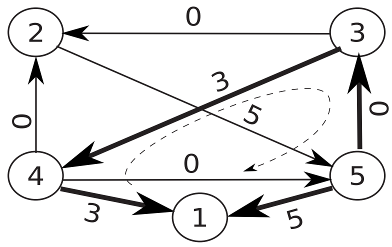


SVOLGIMENTO

L'algoritmo esegue due iterazioni, illustrate dalle prime due figure in alto (da sinistra a destra): in ognuna è mostrato il ciclo C utilizzato (archi evidenziati) col il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La figura in basso mostra invece il grafo residuo relativo all'ultimo flusso individuato ed il corrispondente albero dei cammini minimi (archi evidenziati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.
Si noti che il grafo residuo non contiene archi, non appartenenti all'albero dei cammini minimi individuato, che soddisfino le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza, ad eccezione di alcuni archi opposti a quelli presenti nell'albero. Pertanto non esistono cicli aumentanti di costo *nullo*, salvo cicli della forma (i, j, i), che tuttavia non consentono di modificare il flusso corrente. Segue che il flusso determinato è l'unica soluzione ottima del problema.



$\theta = 1$, c(C) = -14, $cx = 41$



$\theta = 1$, c(C) = -4, $cx = 37$