RICERCA OPERATIVA (a.a. 2013/14)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di PL

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & - & 3x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale della base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del PL dato.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{3, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \ , \ y_N = 0 \ , \ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere e duale non degenere] $h = \min\{\, i \in B \,:\, y_i < 0 \,\} = \min\{3, 4\} = 3$, $B(h) = 1$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{1, 2\}$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi \ , \ \lambda_1 = 3 \ , \ \lambda_2 = 0 \ , \ \bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = 0$$

$k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 2$ [cambio di base degenere]

it.2) $B = \{2, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere e duale non degenere] $h = 4$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$J = \{1\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_1 = 3 \ , \ k = 1$$

it.3) $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[base primale non degenere e duale non degenere] $h = 2$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \emptyset$$

STOP. ξ è una direzione di crescita illimitata, pertanto il problema primale è superiormente illimitato e di conseguenza la regione ammissibile del problema duale è vuota.

2) Si risolva algebricamente il seguente problema di PL

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \end{array}$$

mediante l'algoritmo del Simplesso Duale, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$. Ad ogni iterazione si mostrino la base, la matrice di base e la sua inversa, le soluzioni di base, il vettore η_B, gli indici entrante ed uscente, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, primale e duale, delle basi incontrate.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{y}_B > 0 \Longrightarrow B$ duale non degenere

$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

$k = \min\{\, i \in N \,:\, A_i \bar{x} > b_i \,\} = \min\{3, 4\} = 3$
[regola anticiclo di Bland]
$A_i \bar{x} \neq b_i \ \forall i \in N \Longrightarrow B$ primale non degenere

$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{\theta} = \min\{\, \bar{y}_i / \eta_i \,:\, i \in B \,,\, \eta_i > 0 \,\} = \min\{1, 1\} = 1$

$h = \min\{\, i \in B : \eta_i > 0 \,,\, \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i \,\} = \min\{1, 2\} = 1$ [regola anticiclo di Bland]

it.2) $B = \{2, 3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{y}_B \not> 0 \Longrightarrow B$ duale degenere

$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

$k = \min\{4, 5\} = 4$
[regola anticiclo di Bland]
$A_i \bar{x} \neq b_i \ \forall i \in N \Longrightarrow B$ primale non degenere

$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$, $h = 3$

it.3) $B = \{2, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{y}_B > 0 \Longrightarrow B$ duale non degenere

$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

$k = \min\{5\} = 5$
$A_i \bar{x} \neq b_i \ \forall i \in N \Longrightarrow B$ primale non degenere

$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\eta_B \leq 0 \Longrightarrow$ STOP: il duale è inferiormente illimitato, il primale è vuoto

3) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
(P)\quad
\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & & \\
 & x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & \leq & -2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = [1, 0, 0, 1, 0]$ sia ottima per il suo duale, discutendone in questo caso l'unicità. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P)\ \max\{\, cx \,:\, Ax \leq b \,\} \qquad\qquad (D)\ \min\{\, yb \,:\, yA = c\,,\ y \geq 0 \,\}$$

possiamo enunciare il Teorema degli scarti complementari come segue:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, m \ .$$

Il duale di (P) è

$$
(D)\quad
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\min & -2y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & 3y_4 & & & & \\
 & y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & - & y_5 & = & 3 \\
 & 3y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & - & 2y_5 & = & 2 \\
 & -3y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & + & y_4 & + & y_5 & = & -2 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

ed è immediato verificare che $\bar{y}$ è ammissibile per (D). L'insieme degli indici delle variabili duali positive in $\bar{y}$ è $J(\bar{y}) = \{\, j \in \{1, \dots, m\} \,:\, \bar{y}_j > 0 \,\} = \{1, 4\}$. Di conseguenza, una soluzione primale $\bar{x}$ che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $b_i - A_i\bar{x} = 0$ per $i = 1, 4$, ovvero il primo ed il quarto vincolo devono essere attivi. Pertanto, qualsiasi $\bar{x}$ ottima per (P) deve risolvere il sistema

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3.
\end{array}
\right.
$$

Posto $x_2 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $x(\alpha) = [1, \alpha, 1 + \alpha]$. Affinché $\bar{y}$ sia ottima almeno una di queste deve essere ammissibile per il primale, ossia rispettare anche i vincoli 2, 3 e 5. Da questi si ottengono, rispettivamente, le condizioni

$$-1 + \alpha + (1 + \alpha) \leq 1 \quad , \quad 1 + 2\alpha + 3(1 + \alpha) \leq 4 \quad , \quad -1 - 2\alpha + (1 + \alpha) \leq 0$$

che semplificano in $\alpha \leq 0$ e $\alpha \geq 0$, ossia $\alpha = 0$. Se ne deduce che la soluzione $\bar{x} = [1, 0, 1]$, ammissibile e che rispetta le condizioni degli scarti complementari con $\bar{y}$, è ottima per (P), e pertanto $\bar{y}$ è ottima per (D). Si noti che, ovviamente, $\bar{x}$ è *l'unica* soluzione ottima di (P).

Per verificare se $\bar{y}$ sia unica possiamo considerare $\bar{x} = [1, 0, 1]$ e verificare se esistono altre soluzioni duali ammissibili che rispettano le condizioni degli scarti complementari con essa. Poiché tutti i vincoli del problema tranne il secondo sono attivi in $\bar{x}$, occorre verificare se (D) ammette altre soluzioni ammissibili con $y_2 = 0$, a parte $\bar{y}$. Ponendo $y_1 = \beta$ e risolvendo sulle altre tre variabili si mostra che tali soluzioni, se esistono, devono appartenere alla varietà lineare

$$y(\beta) = \left[\, \beta\,,\, 0\,,\, -7/20 + 7\beta/20\,,\, 4/5 + \beta/5\,,\, -7/4 + 7\beta/4 \,\right] \ .$$

Quindi, $y(\beta) \geq 0$ per ogni $\beta \geq 1$ è una soluzione ammissibile di (D) che rispetta le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$, e pertanto ottima; ne consegue che $\bar{y}$ $(= y(\beta)$ per $\beta = 1)$ non è l'unica soluzione ottima di (D).

4) Si consideri una rete di telecomunicazione descritta mediante un grafo orientato $G = (N, A)$. Il nodo sorgente s deve inviare un messaggio cifrato al nodo destinazione t lungo un cammino orientato di G. Al fine di monitorare l'instradamento del messaggio, si impone di installare un dispositivo di controllo in ogni nodo del cammino da s a t selezionato per l'invio (esclusi s e t). Sapendo che ad ogni collegamento della rete è associato un costo di utilizzo $c_{ij} > 0$, che l'installazione di un dispositivo di controllo in i comporta un costo di installazione $c_i > 0$, e che il budget a disposizione per installare dispositivi di controllo è pari a B, si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere lungo quale cammino di G inviare il messaggio in modo da rispettare il vincolo di budget, minimizzando il costo totale sostenuto per l'invio. *Suggerimento*: si tratta di una variante del modello *PLI* relativo all'individuazione di un cammino minimo da un nodo sorgente a un nodo destinazione prefissati.

SVOLGIMENTO

Introduciamo una famiglia di variabili di flusso binarie x_{ij} per ogni $(i, j) \in A$, con il seguente significato:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene al cammino selezionato da } s \text{ a } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Per rappresentare l'installazione dei dispositivi di monitoraggio introduciamo inoltre variabili binarie y_i per ogni $i \in N \setminus \{s, t\}$, con il seguente significato:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se si installa un dispositivo in } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Una formulazione del problema è quindi la seguente:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in N\setminus\{s,t\}} c_i y_i \tag{1}$$

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = s \\ 1 & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in N \tag{2}$$

$$y_i = \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} \qquad i \in N \setminus \{s,t\} \tag{3}$$

$$\sum_{i\in N\setminus\{s,t\}} c_i y_i \le B \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad (i,j) \in A \tag{5}$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad i \in N \setminus \{s,t\} \tag{6}$$

I vincoli (2) sono i classici vincoli di conservazione di flusso, propri del modello di cammino minimo indicato nel suggerimento: poichè le variabili di flusso sono binarie, tali vincoli individuano un cammino orientato in G da s a t. In effetti niente vieterebbe che, oltre al cammino, le x ammissibili rispetto a (2) individuassero anche cicli disgiunti dal cammino (né che il cammino non sia semplice); il fatto che i costi siano positivi peró renderebbe qualsiasi soluzione di questo tipo chiaramente non ottima. I vincoli (3) impongono che venga installato un dispositivo di controllo in ogni nodo i, diverso da s e t, appartenente al cammino. (4) è il vincolo di budget. Infine la funzione obiettivo (1), da minimizzare, rappresenta il costo totale, espresso dalla somma dei costi di utilizzo degli archi e dei costi di installazione dei dispositivi.

Si osservi che le variabili y_i sono di fatto superflue, potendo essere sostituite nel modello dalle espressioni a destra nei vincoli (3). Ciò equivale a modificare i costi degli archi, aggiungendo al costo c_{ij} di ogni arco (i, j) il costo c_j relativo all'installazione del dispositivo di monitoraggio in j, e a esprimere il vincolo di budget in termini di massimo "peso" degli archi che possono essere selezionati, dove ancora una volta il peso di (i, j) è c_j. Questo è noto come problema del *cammino minimo vincolato*.