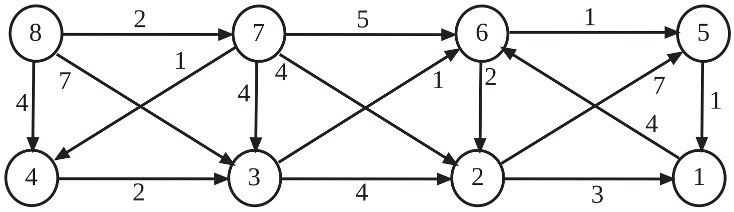
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2013/14)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 7 sul grafo in figura



utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. L'albero determinato è l'unico albero dei cammini minimi di radice 7? Giustificare le risposte.

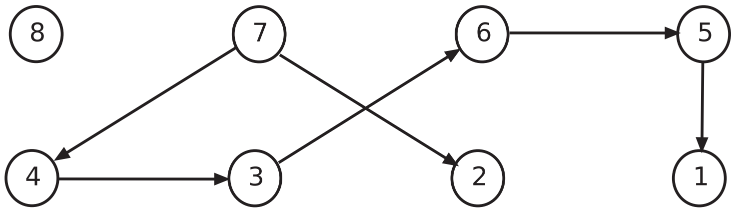
SVOLGIMENTO

Non essendo presenti archi di costo negativo, e non essendo il grafo aciclico (si consideri ad esempio il ciclo (1,6,5)), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 7 \times 7 + 1 = 50.$

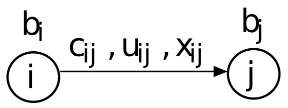
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$p[8]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$d[8]$	Q
0		7	7	7	7	7	7	*nil*	7	50	50	50	50	50	50	0	50	$\{7\}$
1	7	7	7	7	7	7	7	*nil*	7	50	4	4	1	50	5	0	50	$\{2,3,4,6\}$
2	4	7	7	4	7	7	7	*nil*	7	50	4	3	1	50	5	0	50	$\{2,3,6\}$
3	3	7	7	4	7	7	3	*nil*	7	50	4	3	1	50	4	0	50	$\{2,6\}$
4	2	2	7	4	7	2	3	*nil*	7	7	4	3	1	11	4	0	50	$\{1,5,6\}$
5	6	2	7	4	7	6	3	*nil*	7	7	4	3	1	5	4	0	50	$\{1,5\}$
6	5	5	7	4	7	6	3	*nil*	7	6	4	3	1	5	4	0	50	$\{1\}$
7	1	5	7	4	7	6	3	*nil*	7	6	4	3	1	5	4	0	50	$\emptyset$

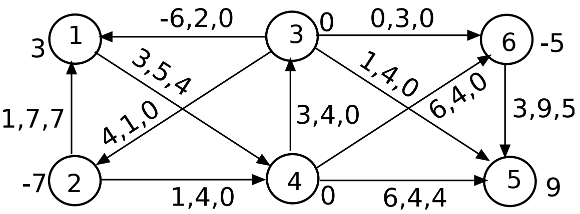
L'albero trovato è mostrato in figura; si noti che il nodo 8 non è raggiungibile dal nodo radice nel grafo dato, come segnalato dalla sua etichetta finale, pari al valore iniziale 50.



Poiché le condizioni di Bellman relative agli archi non appartenenti all'albero valgono in forma di disuguaglianza, segue che quello determinato è l'unico albero dei cammini minimi di radice 7.

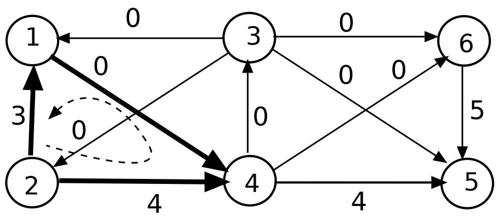
2) Si risolva il problema di flusso di costo minimo relativamente all'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato di costo $cx = 58$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima, e si discuta se è l'unica soluzione ottima del problema.



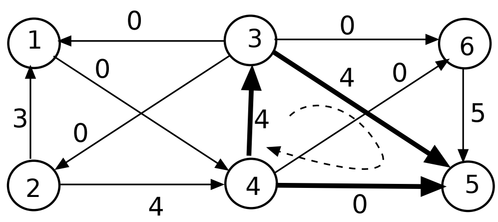


SVOLGIMENTO

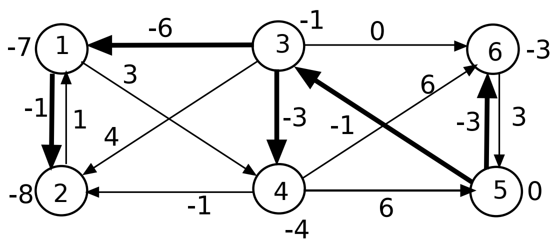
L'algoritmo esegue due iterazioni, illustrate dalle prime due figure in alto (da sinistra a destra): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi evidenziati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La terza figura, in basso, mostra il grafo residuo relativo all'ultima soluzione ed il corrispondente albero dei cammini minimi (archi evidenziati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.



$\theta = 4$, $c(C) = -3$, $cx = 46$



$\theta = 4$, $c(C\ \ ) = -2$, $cx\ \ = 38$



La soluzione ottima è unica, in quanto non esistono nel grafo residuo cicli aumentanti di costo nullo. Infatti, l'unico arco al di fuori dell'albero dei cammini minimi che rispetti all'uguaglianza le condizioni di Bellman è l'arco $(1, 4)$ (infatti $d_1 + c_{14} = -7 + 3 = -4 = d_4$); tale arco però, aggiunto all'albero dei cammini minimi, individua il ciclo $\{1, 3, 4\}$ che non è orientato, e quindi non corrisponde ad un ciclo aumentante.

3) Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 2 \end{array}$$

applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 5\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima duale individuata dall'algoritmo sia unica. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{\, i \in B \, : \, \bar{y}_i < 0 \,\} = 1, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \{\, i \in N \, : \, A_i \xi > 0 \,\} = \{3, 4\},$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i \bar{x}) / A_i \xi \ , \ \lambda_3 = 4 \ , \ \lambda_4 = 4, \ , \ \bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \ : \ i \in J \,\} = 4$$

$$k = \min\{\, i \in J \, : \, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = \min\{3, 4\} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

it.2) $B = \{3, 5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ h = 5, \ B(h) = 2,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{4\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_4 = 0, \quad k = 4 \text{ [cambio di base degenere]}$$

it.3) $B = \{3, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

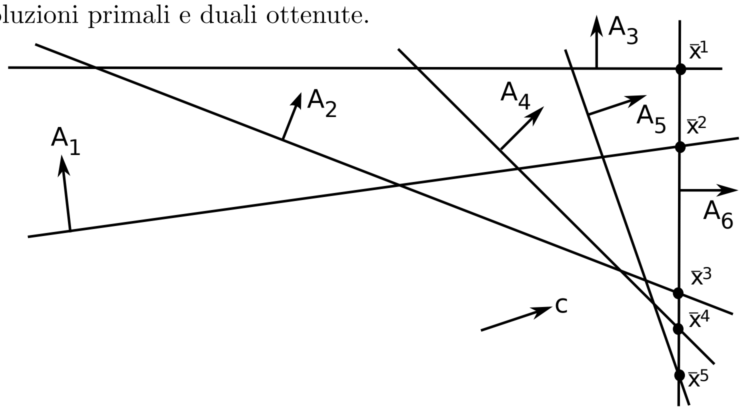
Poiché $\bar{y}_B \geq 0$, $\bar{x} = [-2, 0]$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $\bar{y} = [0, 0, 1, 1, 0]$ è una soluzione ottima per il suo problema duale.

L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{3, 4, 5\}$. Pertanto, una soluzione duale y che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $y_1 = y_2 = 0$. Affinché y sia ammissibile per il duale, essa deve inoltre soddisfare il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -y_3 & & & - & y_5 & = & -1 \\ -y_3 & - & y_4 & & & = & -2 \\ y_3 & , & y_4 & , & y_5 & \geq & 0 \end{array} \right. .$$

Posto $y_5 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma$[1-\alpha, 1+\alpha, \alpha]$. Tali componenti risultano non negative per $0 \leq \alpha \leq 1$; pertanto, l'insieme di tutte e sole le soluzioni ottime duali è $\{\ [0, 0, 1-\alpha, 1+\alpha, \alpha] \ : \ 0 \leq \alpha \leq 1 \ \}$. Quindi $\bar{y}$ non è l'unica soluzione ottima del problema duale; si ottiene, in particolare, ponendo $\alpha = 0$ nell'insieme dato.

4) Si risolva graficamente il problema di *PL* in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{\ 3\ ,\ 6\ \}$; si noti che c ed A_5 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. Al termine si discuta l'unicità delle soluzioni primali e duali ottenute.



SVOLGIMENTO

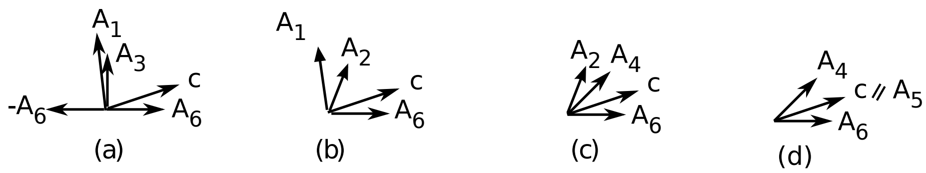
it. 1) $B = \{\ 3\ ,\ 6\ \}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^1$ viola i vincoli 1, 2, 4 e 5, pertanto $k = \min\{1, 2, 4, 5\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland. $\bar{y}_3 > 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_3 e A_6; quindi la base è duale non degenere, ed è anche primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^1)$. Poiché $A_1 \in \text{cono}(A_3, -A_6)$, come mostrato in figura (a), risultano $\eta_3 > 0$, $\eta_6 < 0$, e pertanto $h = 3$.

it. 2): $B = \{\ 1\ ,\ 6\ \}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^2$ viola i vincoli 2, 4 e 5, pertanto $k = \min\{2, 4, 5\} = 2$ per la regola anticiclo di Bland. $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_1 e A_6; quindi la base è duale non degenere, ed è anche primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^2)$. Poiché $A_2 \in \text{cono}(A_1, A_6)$, come mostrato in figura (b), risultano $\eta_1 > 0$, $\eta_6 > 0$; poichè però $c \in \text{cono}(A_2, A_6)$ ma $c \notin \text{cono}(A_1, A_2)$, deve necessariamente risultare $h = 1$.

it. 3): $B = \{\ 2\ ,\ 6\ \}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^3$ viola i vincoli 4 e 5, pertanto $k = \min\{4, 5\} = 4$ per la regola anticiclo di Bland. $\bar{y}_2 > 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_2 e A_6; quindi la base è duale non degenere, ed è anche primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^3)$. Poiché $A_4 \in \text{cono}(A_2, A_6)$, come mostrato in figura (c), risultano $\eta_2 > 0$, $\eta_6 > 0$; poichè però $c \in \text{cono}(A_4, A_6)$ ma $c \notin \text{cono}(A_2, A_4)$, deve necessariamente risultare $h = 2$.

it. 4): $B = \{\ 4\ ,\ 6\ \}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^4$ viola il solo vincolo 5, pertanto $k = 5$. $\bar{y}_4 > 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_4 e A_6; quindi la base è duale non degenere, ed è anche primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^4)$. Poiché $A_5 \in \text{cono}(A_4, A_6)$, come mostrato in figura (d), risultano $\eta_4 > 0$, $\eta_6 > 0$; poichè però c ed A_5 sono collineari, risulta necessariamente $\bar{y}_4/\eta_4 = \bar{y}_6/\eta_6$. Di conseguenza, $h = 4$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 5): $B = \{\ 5\ ,\ 6\ \}$. $\bar{y}_5 > 0$ e $\bar{y}_6 = 0$ in quanto c è collineare ad A_5; quindi la base è duale degenere, mentre è primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^5)$. La soluzione primale di base $\bar{x}^5$ non viola alcun vincolo, e quindi il simplesso duale termina: $\bar{x}^5$ è una soluzione ottima del problema.



Poiché la soluzione ottima duale è degenere, la soluzione ottima primale $\bar{x}^5$ può non essere unica; infatti è facile verificare che questo è il caso, in quanto tutte le soluzioni nel segmento di estremi $\bar{x}^5$ e la soluzione primale corrispondente alla base $\{\ 4\ ,\ 5\ \}$ sono parimenti ottime. Questo però significa che la soluzione ottima duale determinata è invece unica; per verificare questo basta considerare una soluzione primale ottima che non corrisponda ad uno degli estremi del segmento sopra descritto ed applicare il teorema degli scarti complementari, dimostrando così che in qualsiasi soluzione ottima duale solamente la componente y_5 può risultare positiva, e quindi che tale valore è ovviamente univocamente determinato.

5) Dopo aver subito pesanti attacchi da parte di hackers cinesi in cerca di informazioni riservate, il Dipartimento della Difesa (DoD) degli Stati Uniti ha effettuato una revisione dei propri sistemi informatici volta ad eliminare almeno le principali debolezze prima del prossimo, devastante attacco, che si suppone avverrà tra T istanti di tempo. È dato un insieme H di hosts; per ciascun host $h \in H$ è noto il tempo di servizio f_h (non trascurabile) che si paga per iniziare ad installarci *patches*, indipendentemente dal loro numero. È dato inoltre l'insieme P delle patches da passare per eliminare vulnerabilità note, partizionato in sottoinsiemi P_h, ciascuno pertinente ad uno specifico host $h \in H$; per ciascuna patch $p \in P$ è noto il tempo di installazione t_p sull'host corrispondente (univocamente determinato), in aggiunta al tempo fisso di cui sopra. È dato infine un insieme S di servizi di rete vulnerabili; per ciascun servizio $s \in S$ è noto lo score $c_s > 0$ che ne determina l'importanza, e l'insieme delle patches che sono necessarie per proteggerlo. Queste informazioni possono essere rappresentate sotto la forma di un *grafo di attacco* (bipartito) $G = (N, A)$, dove $N = P \times S$ ed A è l'insieme delle coppie (p, s) tali per cui se non viene passata la patch p è possibile attaccare il servizio s. Si formuli come *PLI* il problema del DoD, che è quello di decidere quali patches passare entro il tempo limite T per massimizzare lo score dei servizi protetti, ossia tali per cui sono state passate tutte le patches necessarie; i servizi "parzialmente coperti", ossia per i quali non sono state passate tutte le patches (basta che ne manchi una), sono ancora vulnerabili e quindi non contribuiscono allo score. Per motivi di sicurezza, le operazioni sui server non possono essere parallelizzate e devono quindi essere svolte in maniera rigidamente sequenziale.

SVOLGIMENTO

Per formulare il problema definiamo le seguenti variabili binarie:

- x_h per $h \in H$ che vale 1 se passo almeno una patch sull'host h;
- y_p per $p \in P$ che vale 1 se passo la patch p (sul suo specifico host);
- z_s per $s \in S$ che vale 1 se proteggo il servizio s.

Una formulazione del problema è allora:

$$
\begin{array}{llr}
\max \sum_{s \in S} c_s z_s & & \\
\quad x_h \geq y_p & p \in P_h \quad , \quad h \in H & (1) \\
\quad \sum_{h \in H} f_h x_h + \sum_{p \in P} y_p t_p \leq T & & (2) \\
\quad z_s \leq y_p & (p, s) \in A & (3) \\
\quad x_h \in \{0, 1\} & h \in H & \\
\quad y_p \in \{0, 1\} & p \in P & \\
\quad z_s \in \{0, 1\} & s \in S &
\end{array}
$$

I vincoli (1) garantiscono che se passo una patch su un certo host allora "pago il costo fisso", in termini di tempo, per quell'host. Questo nel vincolo (2), che rappresenta il budget temporale a disposizione per tutte le operazioni. Infine, i vincoli (3) garantiscono che l'unico modo per avere $z_s = 1$ è quello di avere $y_p = 1$ per tutte le patches necessarie a proteggere s; poiché $c_s > 0$, a quel punto si avrà in effetti $z_s = 1$ nella soluzione ottima.