Esame di Ricerca Operativa del 02/02/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. (a) Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -6\,x_1 + 5\,x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 + 2\,x_2 \leq -5 \\ 3\,x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -2\,x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 7 \\ x_1 - x_2 \leq 14 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{3,4}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Dire se $x = (-1, -2)$ e' una soluzione di base per il problema precedente. Motivare la risposta.

(c) Determinare la soluzione ottima del problema duale associato al problema definito in (a) e discuterne l'unicitá.

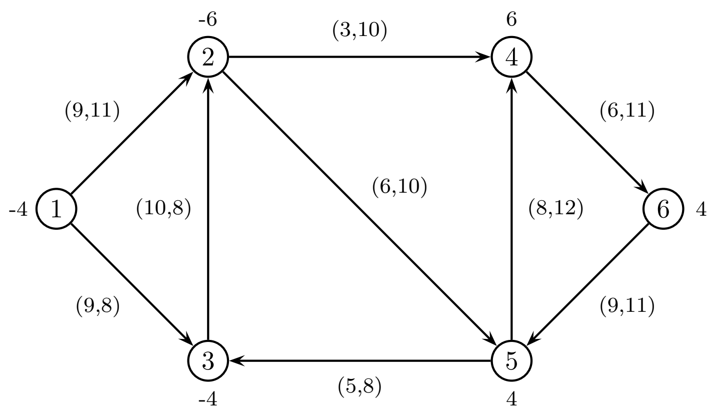
Esercizio 2. Uno studente vuole definire un piano di studio settimanale per preparare gli esami A, B e C, massimizzando le ore (h) di studio compatibilmente con i suoi impegni giornalieri. Nella seguente tabella sono indicati (con $*$) gli esami a cui lo studente intende dedicarsi ogni giorno, le ore massime di studio giornaliero e le ore minime settimanali che intende dedicare a ciascun esame.

	Lun	Mar	Mer	Gio	Ven	h min studio (sett.)
A	*		*	*		5
B		*		*	*	4
C	*	*	*		*	3
h max studio (giorn.)	5	6	4	7	5	

Scrivere un problema di programmazione lineare per determinare le ore di studio che lo studente deve dedicare giornalmente a ciascun esame in modo da massimizzare il numero complessivo di ore settimanali di studio.

variabili decisionali: modello:

Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).

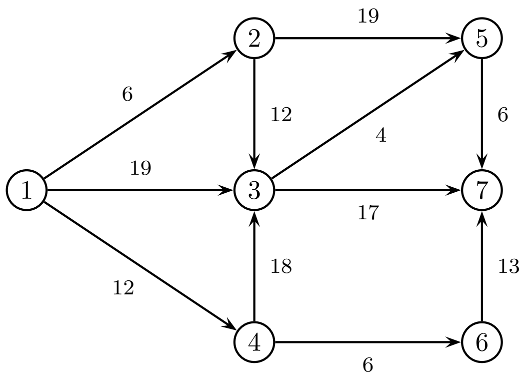


	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,5) (3,2) (4,6) (6,5)	
Archi di U	(2,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^{+}, ϑ^{-}		
Arco uscente		

(b) Discutere la degenerazione della soluzione x determinata alla seconda iterazione.

(c) Discutere la degenerazione della soluzione π determinata alla seconda iterazione.

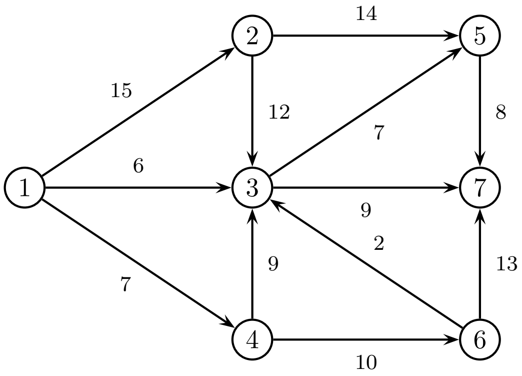
Esercizio 4. (a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

(b) Determinare una soluzione ottima del problema duale associato al problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 definito al punto (a).

Esercizio 5. Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

(b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco $(1, 2)$. Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -6\ x_1 + 5\ x_2 \\ -x_1 + x_2 \le -7 \\ x_1 + 2\ x_2 \le -5 \\ 3\ x_1 - x_2 \le 20 \\ x_1 - x_2 \le 12 \\ -2\ x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 - x_2 \le 7 \\ x_1 - x_2 \le 14 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	$\{3,\ 4\}$	$(4,\ -8)$	$\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{9}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	3	$\frac{8}{3},\ 3$	5
Iterazione 2	$\{4,\ 5\}$	$\left(\frac{8}{3},\ -\frac{28}{3}\right)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{16}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$	4	$5,\ 11,$	1
Iterazione 3	$\{1,\ 5\}$	$(1,\ -6)$	$\left(\frac{16}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$			

(b) La soluzione $(-1, -2)$ é di base essendo associata alla base $B = \{2,\ 5\}$.
(c) La soluzione ottima del problema duale é $\left(\frac{16}{3},\ 0,\ 0,\ 0, \frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$ ed é unica essendo la soluzione ottima del primale $(1,\ -6)$ non degenere.

Esercizio 2.

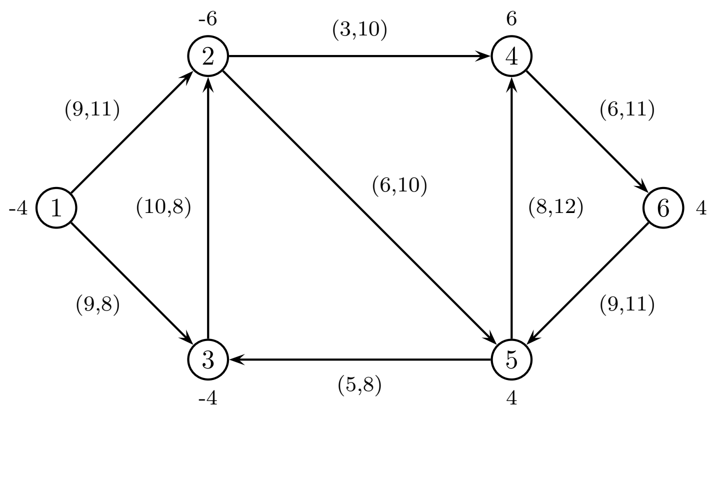
Variabili decisionali:

Indichiamo con $i = 1, 2, 3$ gli esami A,B,C rispettivamente e con $j = 1, 2, 3, 4, 5,$ i giorni della settimana dal lunedi al venerdi.
Sia $C = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 5)\}$.
x_{ij} = ore dedicate all'esame i nel giorno j, $(i, j) \in C$;

Modello:

$$\begin{cases} \max \sum_{(i,j)\in C} x_{ij} \\ x_{11} + x_{13} + x_{14} \ge 5 \\ x_{22} + x_{24} + x_{25} \ge 4 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{35} \ge 3 \\ x_{11} + x_{31} \le 5 \\ x_{22} + x_{32} \le 6 \\ x_{13} + x_{33} \le 4 \\ x_{14} + x_{24} \le 7 \\ x_{25} + x_{35} \le 5 \\ x_{ij} \ge 0,\ (i, j) \in C \end{cases}$$

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete.

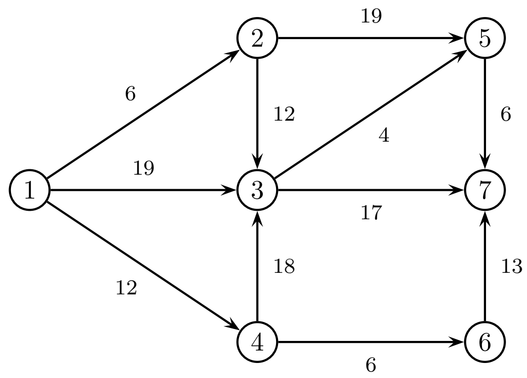


	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,5) (3,2) (4,6) (6,5)	(1,2) (2,5) (3,2) (4,6) (6,5)
Archi di U	(2,4)	(2,4)
x	(0, 4, 10, 4, 8, 4, 0, 0, 0)	(4, 0, 10, 4, 4, 4, 0, 0, 0)
π	(0, 19, 9, 10, 25, 16)	(0, 9, -1, 0, 15, 6)
Arco entrante	(1,2)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	11 , 4	6 , 0
Arco uscente	(1,3)	(6,5)

(b) Discutere la degenerazione della soluzione x determinata alla seconda iterazione.
La soluzione é degenere essendo il flusso sull'arco $(6, 5)$ nullo.

(c) Discutere la degenerazione della soluzione π determinata alla seconda iterazione.
La soluzione é non degenere essendo tutti i costi ridotti $\bar{c}_{ij} := c_{ij} + \pi_i - \pi_j \neq 0$ per ogni arco in L ed in U.

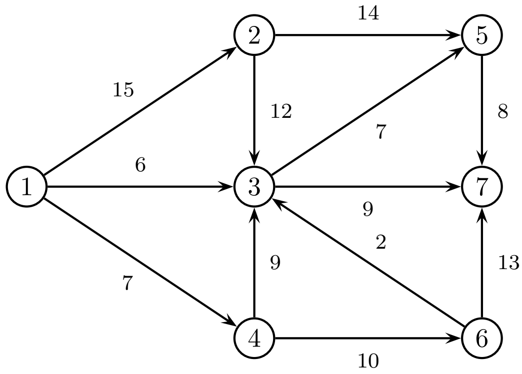
Esercizio 4. (a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		3		6		5		7	
nodo 2	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 3	19	1	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2
nodo 4	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 5	$+\infty$	-1	25	2	25	2	22	3	22	3	22	3	22	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	18	4	18	4	18	4	18	4	18	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	35	3	31	6	28	5	28	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		3, 5, 6		5, 6, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

(b) Determinare una soluzione ottima del problema duale associato al problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 definito al punto (a): $\pi = (0, 6, 18, 12, 22, 18, 28)$.

Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 0)	6
1 - 2 - 3 - 7	3	(3, 6, 0, 3, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0, 0)	9
1 - 2 - 5 - 7	8	(11, 6, 0, 3, 8, 0, 9, 0, 0, 8, 0, 0)	17
1 - 4 - 6 - 7	7	(11, 6, 7, 3, 8, 0, 9, 0, 7, 8, 0, 7)	24

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

(b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco $(1, 2)$. Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

Il taglio di capacitá mimima non contenente l'arco $(1, 2)$ é quello determinato dall'algoritmo ed ha capacitá 24, mentre quello non contenente l'arco $(1, 2)$ é $N_s = \{1\}$ $\quad N_t = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ di capacitá $13 + k$. Pertanto, per $0 < k \leq 11$, il flusso massimo della rete é $13 + k$ mentre per $k \geq 11$ il flusso massimo é 24.