Esame di Ricerca Operativa del 11/1/19

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. (a) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare, determinandone il problema duale ed applicando l'algoritmo del simplesso duale:

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

	Base	y	x	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
Iterazione 1	{1,5}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Dire se $B_1 = \{2, 3\}$ e $B_2 = \{4, 5\}$ sono basi ammissibili per il problema definito in a), discutendo la degenerazione delle soluzioni di base primali ad esse associate. Motivare la risposta.

(c) Si rimpiazzi nel problema definito in a) il vincolo $x_1 + x_2 \leq -1$ con il vincolo $x_1 + x_2 \leq a$. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, il problema ammette ottimo finito.

Esercizio 2. Un' azienda edile ha sottoscritto contratti relativi alla costruzione di quattro edifici E1, E2, E3, E4, che richiedono rispettivamente 450, 275, 300 e 350 tonnellate di cemento per essere completati. Vengono a tale fine interpellate tre compagnie specializzate nella produzione di cemento. La Compagnia 1 (C1) può consegnare complessivamente al più 525 tonnellate di cemento, la Compagnia 2 (C2) al più 450 tonnellate, mentre la Compagnia 3 (C3) può consegnare al più 550 tonnellate di cemento. Il prezzo di acquisto per tonnellata di cemento dipende dalla Compagnia e dal sito di costruzione come indicato nella seguente tabella. Le compagnie pongono però delle condizioni speciali relativamente alle modalitá di consegna del cemento: in particolare, la compagnia C3 non puo' effettuare consegne presso il sito dell'edificio E2. Inoltre, per vincoli di carattere contrattuale, la quantita' di cemento acquistata presso la compagnia C1 deve essere almeno il 30% della quantita' acquistata presso la compagnia C2.

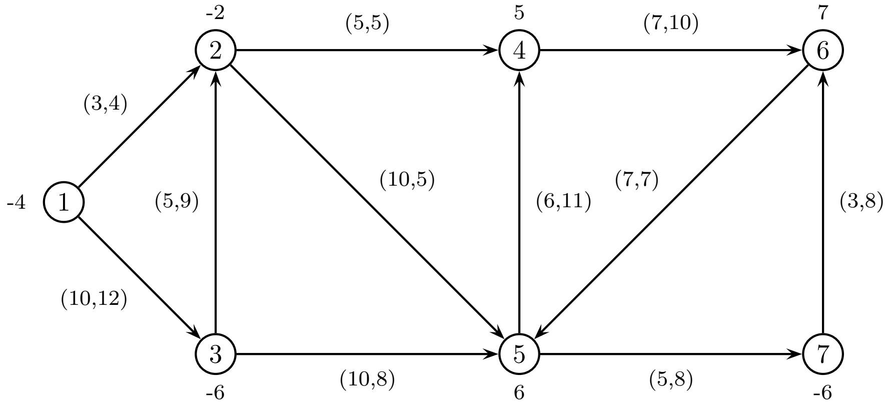
	C1	C2	C3
E1	120	100	140
E2	120	100	
E3	130	115	140
E4	130	115	140

Si formuli un problema di programmazione lineare per determinare le quantita' di cemento che la ditta deve comprare presso ciascuna compagnia, per ogni edificio, in modo da minimizzare il costo complessivo.

variabili decisionali:

modello:

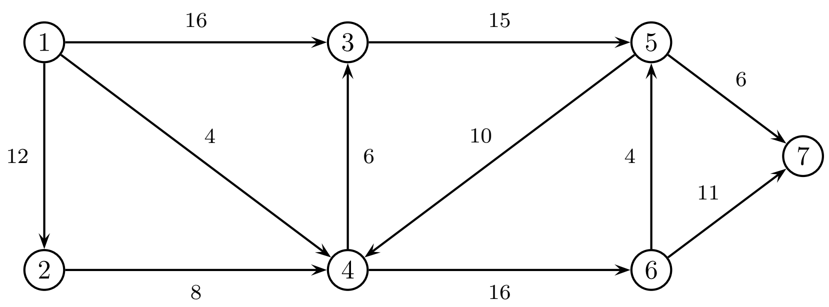
Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso di costo minimo definito dalla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)	
Archi di U	(1,2) (2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 4. Si consideri la rete definita nell'esercizio 3 e la soluzione $\bar{x} = (3, 1, 5, 0, 0, 7, 1, 1, 0, 0, 6)$. Si dica se $\bar{x}$ é una soluzione di base ammissibile, discutendone eventualmente la degenerazione.

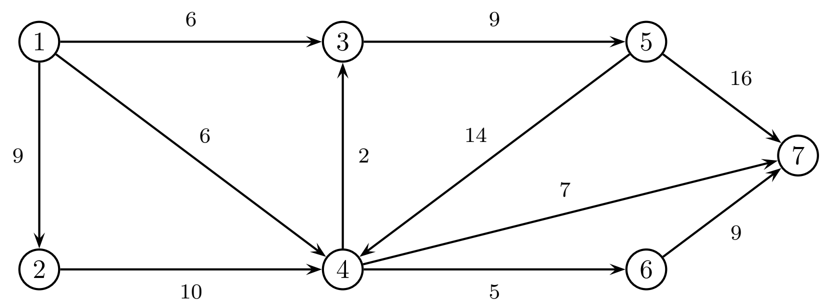
Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



(b) Discutere l'unicitá della soluzione determinata al punto a).

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla rete:



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

(b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco $(3, 5)$. Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

SOLUZIONI

Esercizio 1. (a) Risolvere il seguente problema di programmazione lineare, determinandone il problema duale ed applicando l'algoritmo del simplesso duale:

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 - \ 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - \ x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 \quad \leq 0 \\ \quad -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

	Base	y	x	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
Iterazione 1	$\{1,\ 5\}$	$\left(\frac{3}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{7}{2}\right)$	$(1,\ 0)$	2	$3 \quad \frac{7}{3}$	5
Iterazione 2	$\{1,\ 2\}$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	$\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$	3	$\frac{1}{2}$	1
Iterazione 3	$\{2,\ 3\}$	$\left(0,\ \frac{5}{2}, \frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$	$\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$	4	$\emptyset$	
Iterazione 4						

Il problema duale e' illimitato inferiormente, pertanto la regione ammissibile del problema primale definito in a) e' vuota.

(b) Dire se $B_1 = \{2, 3\}$ e $B_2 = \{4, 5\}$ sono basi ammissibili per il problema definito in a), discutendo la degenerazione delle soluzioni di base primali ad esse associate. Motivare la risposta.

$B_1 = \{2, 3\}$ é una base essendo la matrice A_{B_1} invertibile. B_1 non é ammissibile essendo la soluzione di base associata a B_1, $x = (-1/2, -1/2)$, non ammissibile. Inoltre, $x = (-1/2, -1/2)$ é non degenere.

Analogamente $B_2 = \{4, 5\}$ é una base non ammissibile,essendo la soluzione di base associata a B_2, $x = (0, 0)$, non ammissibile. $x = (0, 0)$, é degenere, aderendo anche al secondo vincolo.

(c) Si rimpiazzi nel problema definito in a) il vincolo $x_1 + x_2 \leq -1$ con il vincolo $x_1 + x_2 \leq a$. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, il problema ammette ottimo finito.

Si noti che per $a < 0$ la regione ammissibile del problema e' vuota, mentre per $a \geq 0$, la regione ammissibile e' non vuota ($x = (0, 0)$ é una soluzione ammissibile) ed e' limitata, cosicche' il problema ammette ottimo finito.

Esercizio 2.

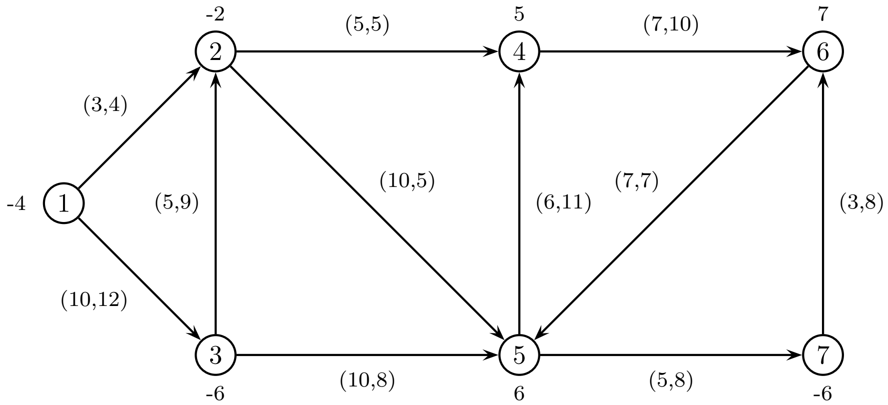
Variabili decisionali: Poniamo

x_{ij} la quantitá di cemento per l'edificio Ei acquistata presso la compagnia Cj, $i = 1, ., 4$, $j = 1, 2, 3$, $(i, j) \neq (2, 3)$.

Modello:

$$\begin{cases} \min\ [120x_{11} + 100x_{12} + 140x_{13} + 120x_{21} + 100x_{22} + 130x_{31} + 115x_{32} + 140x_{33} + 130x_{41} + 115x_{42} + 140x_{43}] \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 450 \\ x_{21} + x_{22} = 275 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 300 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 350 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 525 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \leq 450 \\ x_{13} + x_{33} + x_{43} \leq 550 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 0.3(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, .., 4 \quad j = 1, 2, 3, \ \ (i, j) \neq (2, 3) \end{cases}$$

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso di costo minimo definito dalla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).

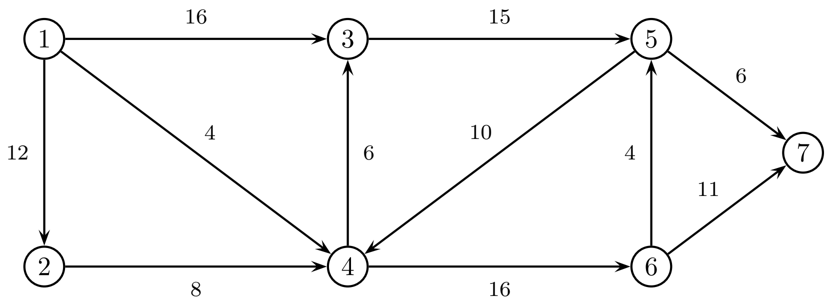


	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)	(1,3) (2,5) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)
Archi di U	(1,2) (2,5)	(1,2) (2,4)
x	(4, 0, 1, 5, 0, 6, 1, 5, 0, 0, 6)	(4, 0, 5, 1, 0, 6, 1, 1, 0, 0, 6)
π	(0, 21, 10, 26, 20, 33, 30)	(0, 10, 10, 26, 20, 33, 30)
Arco entrante	(2,5)	(5,7)
ϑ^+, ϑ^-	4 , 5	2 , 1
Arco uscente	(2,4)	(4,6)

Esercizio 4. Si consideri la rete definita nell'esercizio 3 e la soluzione $\bar{x} = (3, 1, 5, 0, 0, 7, 1, 1, 0, 0, 6)$.
Si dica se $\bar{x}$ é una soluzione di base ammissibile, discutendone eventualmente la degenerazione.

$\bar{x}$ é ammissibile in quanto soddisfa i vincoli di bilancio ai nodi e i vincoli di capacitá sugli archi.
$\bar{x}$ e' una soluzione di base, in quanto esiste una tripartizione (T, L, U), dell'insieme degli archi, che la genera, ove T sia un albero di copertura per la rete data, L un sottoinsieme di archi a capacitá nulla ed U un sottoinsieme di archi saturi. La tripartizione associata é le seguente:
$T = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5), (4, 6), (5, 4), (7, 6)\}, L = \{(3, 2), (2, 5), (5, 7), (6, 5)\}, U = \{(2, 4)\}$;
La soluzione $\bar{x}$ é non degenere, non essendo presenti in T archi a flusso nullo o saturi.

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.

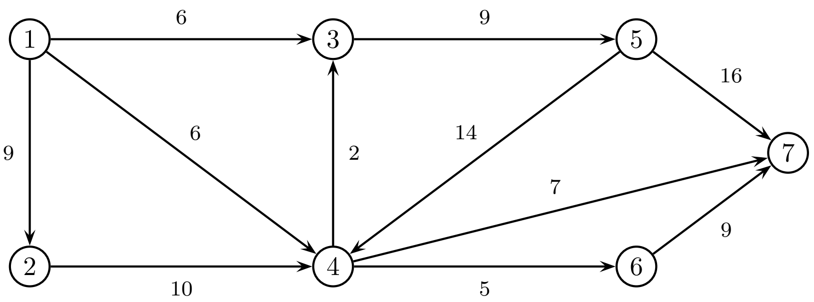


	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		3		2		6		5		7	
nodo 2	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 3	16	1	10	4	10	4	10	4	10	4	10	4	10	4
nodo 4	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	25	3	25	3	24	6	24	6	24	6
nodo 6	$+\infty$	-1	20	4	20	4	20	4	20	4	20	4	20	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	31	6	30	5	30	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 5, 6		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

(b) Discutere l'unicitá della soluzione determinata al punto a).

La soluzione determinata é unica essendo verificate le disuguaglianze $\pi_i + c_{ij} > \pi_j$, per ogni $(i, j) \notin T$ ove T é l'albero ottimale determinato al punto a).

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 4 - 7	6	(0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0)	6
1 - 2 - 4 - 7	1	(1, 0, 6, 1, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0)	7
1 - 3 - 5 - 7	6	(1, 6, 6, 1, 6, 0, 0, 7, 0, 6, 0)	13
1 - 2 - 4 - 6 - 7	5	(6, 6, 6, 6, 6, 0, 5, 7, 0, 6, 5)	18
1 - 2 - 4 - 3 - 5 - 7	2	(8, 6, 6, 8, 8, 2, 5, 7, 0, 8, 5)	20

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2, 4\}$ $\quad$ $N_t = \{3, 5, 6, 7\}$

(b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco $(3, 5)$. Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

Un taglio di capacitá minima contenente l'arco $(3, 5)$ é $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad N_t = \{5, 6, 7\}$ di capacitá $12 + k$ mentre un taglio di capacitá minima non contenente l'arco $(5, 7)$ é $N_s = \{1, 2, 4\}$ $\quad N_t = \{3, 5, 6, 7\}$ dato dall'algoritmo di Edmonds-Karp e di capacitá 20. Pertanto, per $k \geq 8$ il flusso massimo della rete é 20, mentre per $0 < k \leq 8$ il flusso massimo é $12 + k$.