Esame di Ricerca Operativa del 12/01/2018

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. a) Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 - 2\ x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -5 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq -4 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{3,7}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

b) Discutere la degenerazione della soluzione ottima del problema determinata al punto a).

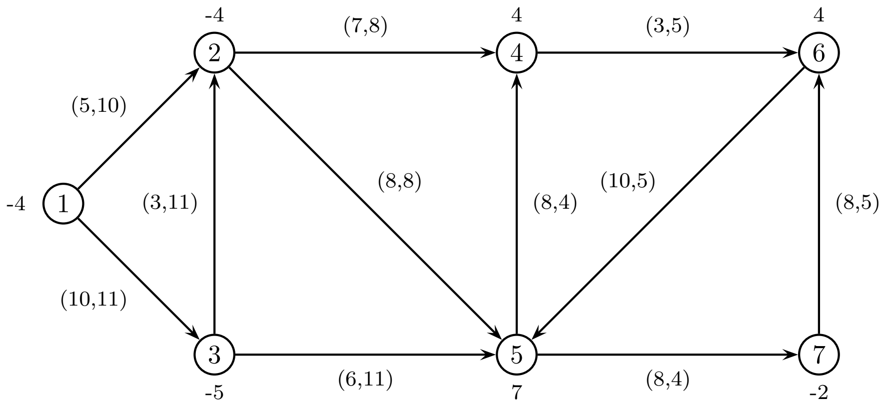
c) Discutere l'unicitá della soluzione ottima del problema determinata al punto a).

Esercizio 2. Una fabbrica automobilistica produce tre tipi di autovetture T_1, T_2, T_3 negli stabilimenti S_1, S_2, S_3. La capacitá di produzione mensile degli stabilimenti S_1, S_2, S_3 é data da 100, 80 e 100 autovetture rispettivamente ed il costo di produzione di una singola autovettura di tipo T_i nello stabilimento S_j e' dato da c_{ij}, $i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3$. Sapendo che la produzione mensile deve essere di almeno 80 autovetture per ogni tipo e che la produzione dello stabilimento S_1 deve essere almeno il 30% della produzione complessiva, si scriva un problema di programmazione lineare per determinare la quantitá di macchine da produrre mensilmente in ciascun stabilimento in modo da minimizzare il costo complessivo di produzione.

Variabili decisionali:

Modello:

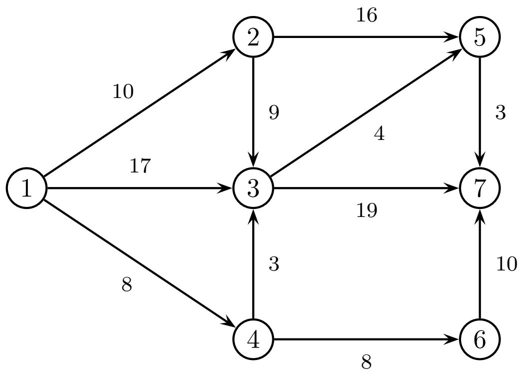
Esercizio 3. a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (6,5) (7,6)	
Archi di U	(5,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

b) Discutere la degenerazione della soluzione x determinata alla seconda iterazione:

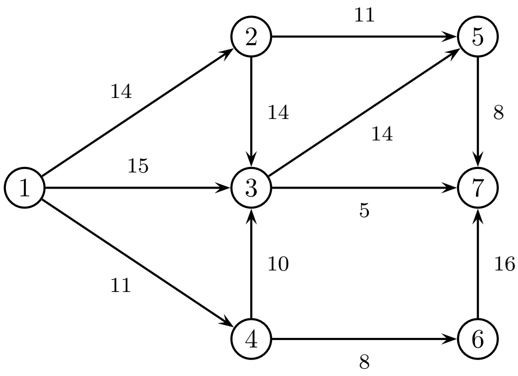
Esercizio 4. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Sia $k \in \mathbb{R}$ il costo dell'arco (2,3). Si determini in funzione di k il cammino di costo minimo dal nodo 1 al nodo 7.

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$	$N_t =$

b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco (1,4). Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso primale il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 - 2\,x_2 \\ -2\,x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2\,x_2 \leq -5 \\ 3\,x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq -4 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
iterazione 1	$\{3,\ 7\}$	$(3,\ -4)$	$(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ -3)$	7	$2,\ \frac{5}{2}$	1
iterazione 2	$\{1,\ 3\}$	$(1,\ -6)$	$(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$	3	$3,\ 5,\ \frac{33}{5}$	2
iterazione 3	$\{1,\ 2\}$	$(2,\ -8)$	$(-1,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$	1	$1,\ \frac{3}{2}$	4
iterazione 4	$\{2,\ 4\}$	$(3,\ -9)$	$\left(0,\ \frac{3}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$			

b) La soluzione ottima e' non degenere.

c) La soluzione ottima e' unica essendo la soluzione y determinata alla iterazione 4 non degenere.

Esercizio 2.

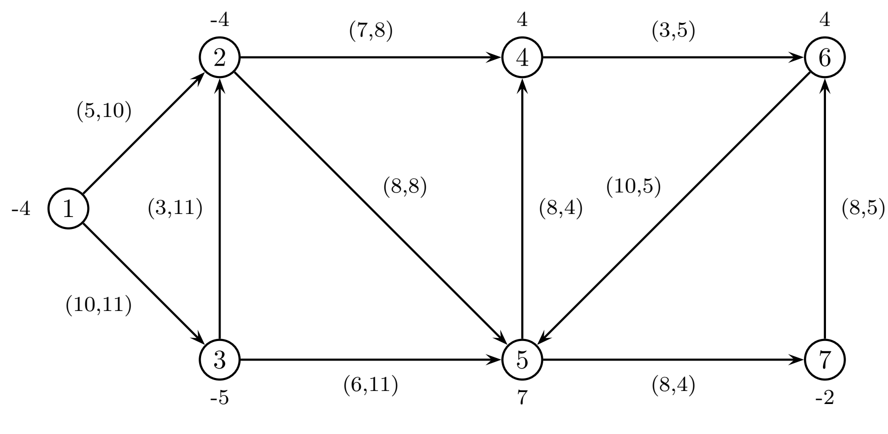
Variabili decisionali:

x_{ij} = quantita' di macchine di tipo T_i prodotte mensilmente nello stabilimento S_j, $i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3;$

Modello:

$$\begin{cases} \min\ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 100 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 80 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 100 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 80 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 80 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 80 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 0.3\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} x_{ij}\right) \\ x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, \end{cases}$$

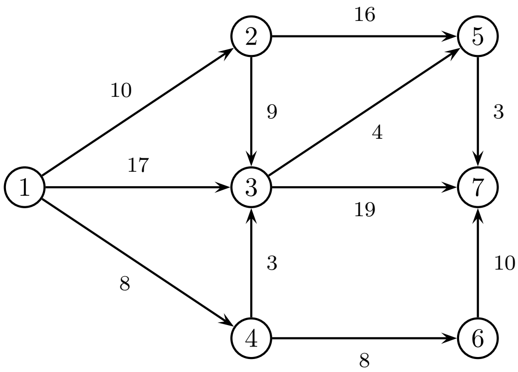
Esercizio 3. a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (6,5) (7,6)	(1,3) (2,4) (2,5) (3,5) (4,6) (7,6)
Archi di U	(5,4)	(5,4)
x	$(0,\ 4,\ 4,\ 0,\ 0,\ 9,\ 4,\ 4,\ 0,\ 2,\ 2)$	$(0,\ 4,\ 2,\ 2,\ 0,\ 9,\ 2,\ 4,\ 0,\ 0,\ 2)$
π	$(0,\ -4,\ 10,\ 3,\ 16,\ 6,\ -2)$	$(0,\ 8,\ 10,\ 15,\ 16,\ 18,\ 10)$
Arco entrante	(2,5)	(1,2)
ϑ^+, ϑ^-	8 , 2	6 , 4
Arco uscente	(6,5)	(1,3)

b) La soluzione x determinata all' iterazione 2 è non degenere.

Esercizio 4. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.

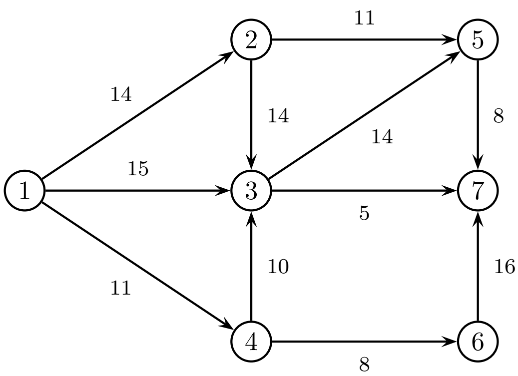


	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		2		3		5		6		7	
nodo 2	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1
nodo 3	17	1	11	4	11	4	11	4	11	4	11	4	11	4
nodo 4	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	2	15	3	15	3	15	3	15	3
nodo 6	$+\infty$	-1	16	4	16	4	16	4	16	4	16	4	16	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	30	3	18	5	18	5	18	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		3, 5, 6		5, 6, 7		6, 7		7		$\emptyset$	

b) Sia $k \in \mathbb{R}$ il costo dell'arco (2,3). Si determini in funzione di k il cammino di costo minimo dal nodo 1 al nodo 7.

Il cammino di costo minimo da 1 a 7 è: 1-4-3-5-7 per $k \geq 1$ e 1-2-3-5-7 per $k \leq 1$.

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	5	(0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0)	5
1 - 2 - 5 - 7	8	(8, 5, 0, 0, 8, 0, 5, 0, 0, 8, 0)	13
1 - 4 - 6 - 7	8	(8, 5, 8, 0, 8, 0, 5, 0, 8, 8, 8)	21

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $N_t = \{6, 7\}$

b) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco (1,4). Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

Il flusso massimo della rete è $k + 13$ per $0 < k \leq 8$ mentre è 21 per $k \geq 8$.