Esame di Ricerca Operativa del 13/01/2020

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare $P(a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \max\ ax_1 + bx_2 \\ -x_2 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - \ x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

(i) Risolvere il problema $P(a,b)$ per $a = 5$, $b = -3$ applicando l'algoritmo del simplesso.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{2,5}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(ii) Dire per quali valori dei parametri reali a, b la soluzione determinata al punto (i) risulta essere ottima per il problema $P(a,b)$. Giustificare la risposta.

(3i) Dire per quali valori dei parametri a, b il problema $P(a,b)$ ammette ottimo finito. Giustificare la risposta.

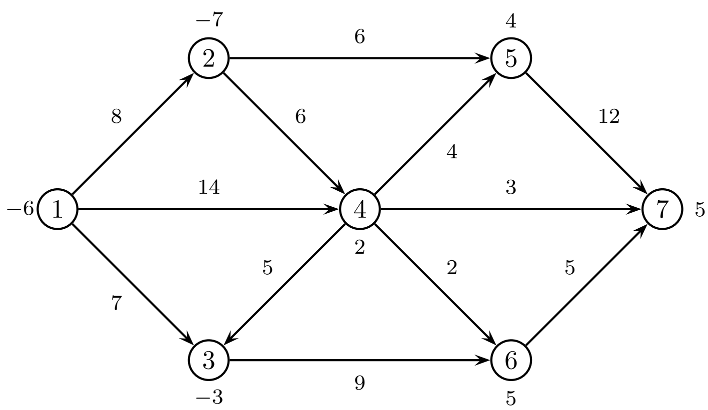
Esercizio 2. (i) Un' agricoltore produce ortaggi, grano e frutta in tre appezzamenti di terreno $T1$, $T2$, $T3$. L'appezzamento $T1$ é costituito da 60 ettari di terreno e dispone di una quantitá di acqua pari a 700.000 mc (metri cubi). L'appezzamento $T2$ é costituito da 70 ettari di terreno e dispone di una quantitá di acqua pari a 500.000 mc, mentre $T3$ é costituito da 45 ettari di terreno e dispone di 600.000 mc di acqua. Il profitto derivante dalla coltivazione di ogni ettaro di terreno é di 4000, 5000, e 6000 euro per la produzione degli ortaggi, grano e frutta, rispettivamente ed ogni ettaro di terreno necessita di 1000, 1500, e 2000 mc di acqua per la produzione degli ortaggi, grano e frutta, rispettivamente. Inoltre, per motivazioni di carattere economico, e' necessario che l'estensione complessiva del terrreno coltivato a frutta non superi il 30% del totale del terreno coltivato. Si formuli un problema di programmazione lineare per determinare come suddividere le coltivazioni nelle varie tenute in modo da massimizzare il profitto complessivo.

variabili decisionali:

modello:

(ii) Dimostrare che il problema di programmazione lineare formulato al punto (i) ammette regione ammissibile non vuota.

Esercizio 3. (i) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso di costo minimo senza capacitá superiori sugli archi, definito dalla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco é indicato il costo).

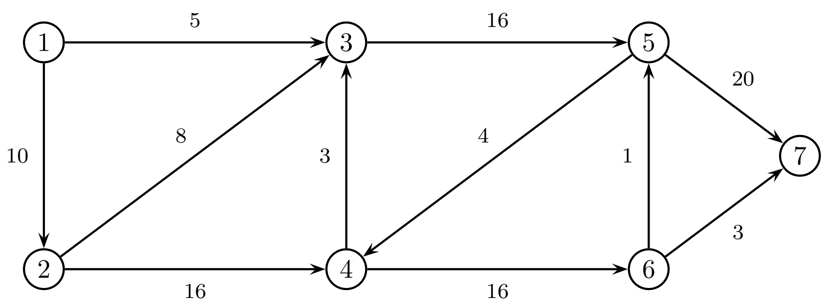


	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (2,5) (3,6) (5,7) (6,7)	
x		
π		
Arco entrante		
$\vartheta_{\max}$		
Arco uscente		

(ii) Discutere la degenerazione delle soluzioni x e π determinate alla seconda iterazione.

(3i) Dire se il problema del flusso di costo minimo definito al punto (i) ammette ottimo finito. Giustificare la risposta.

Esercizio 4. (i) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla rete:



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

(ii) Si elimini dalla rete definita in (i) l'arco (4,6). Si determini la dimensione ed il rango della matrice di incidenza E associata alla rete cosi' ottenuta. Si dica se in tal caso il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 ammette soluzione. Giustificare la risposta.

Esercizio 5. (i) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla rete definita nell'esercizio 3, ove i valori indicati sugli archi sono interpretati come capacitá, determinandone in modo opportuno i bilanci ai nodi.

Vettore dei bilanci ai nodi: $b^T =$

cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

(ii) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco (4,5). Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max\ ax_1 + bx_2 \\ -x_2 \le 1 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - \ x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \end{cases}$$

(i) Risolvere il problema $P(a, b)$ per $a = 5$, $b = -3$ applicando l'algoritmo del simplesso:

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	$\{2, 5\}$	$(0,\ 2)$	$(0,\ 2,\ 0,\ 0,\ -7)$	5	1 3	3
Iterazione 2	$\{2, 3\}$	$(2,\ 3)$	$\left(0, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3},\ 0,\ 0,\right)$	2	6 6	1
Iterazione 3	$\{1,\ 3\}$	$(0, -1)$	$\left(\frac{1}{2},\ 0, \frac{5}{2},\ 0,\ 0,\right)$			

(ii) Dire per quali valori dei parametri reali a, b la soluzione determinata al punto (i) risulta essere ottima per il problema $P(a, b)$. Giustificare la risposta.

Supponendo $c^T = (a, b)$ si ottiene che la soluzione di base associata a $\bar{x} = (0, -1)^T$ per la base $B = \{1, 3\}$, é: $\bar{y} = (-\frac{a}{2} - b, 0, \frac{a}{2}, 0, 0)^T$, da cui $\bar{x}$ é ottima se risulta $\bar{y} \ge 0$, ossia

$$-\frac{a}{2} \ge b, \quad a \ge 0.$$

Si noti che $\bar{x}$ é degenere, da cui piu' basi risultano essere associate a $\bar{x}$. Si puo' verificare che la precedente condizione é la piu' restrittiva in modo da garantire l'ammissibilitá della corrispondente soluzione di base complementare.

(3i) Dire per quali valori dei parametri a, b il problema $P(a, b)$ ammette ottimo finito. Giustificare la risposta.

Il problema ammette ottimo finito per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ essendo la regione ammissibile limitata.

Esercizio 2.

Variabili decisionali:

Si indichino con $i = 1, 2, 3$, gli appezzamenti $T1$, $T2$, $T3$ e con $j = 1, 2, 3$, le tipologie di coltivazioni ad ortaggi, grano e frutta.

Sia x_{ij} l'estensione (in ettari) dell'appezzamento i destinato alla coltivazione j, $\ i = 1, 2, 3 \ \ j = 1, 2, 3$.

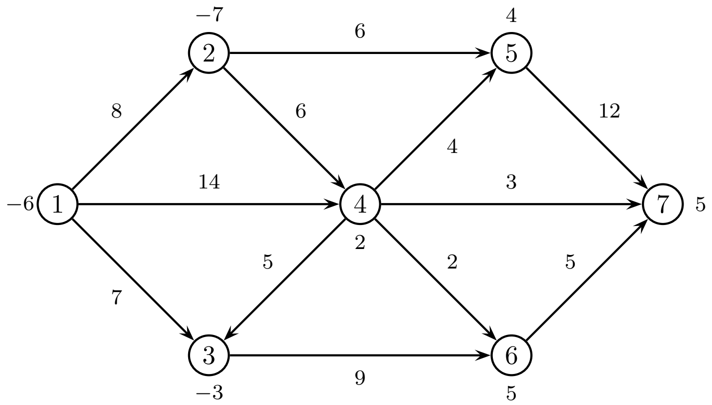
Modello:

$$\begin{cases} \max\ [4000(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 5000(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 6000(x_{13} + x_{23} + x_{33})] \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 60 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 70 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 45 \\ 1000x_{11} + 1500x_{12} + 2000x_{13} \le 700.000 \\ 1000x_{21} + 1500x_{22} + 2000x_{23} \le 500000 \\ 1000x_{31} + 1500x_{32} + 2000x_{33} \le 600000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 0.3 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \\ x_{ij} \ge 0,\ i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

(ii) Dimostrare che il problema di programmazione lineare formulato al punto (i) ammette regione ammissibile non vuota.

Basta osservare che la soluzione nulla é ammissibile.

Esercizio 3. (i) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso di costo minimo senza capacitá superiori sugli archi, definito dalla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco é indicato il costo).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,4) (2,5) (3,6) (5,7) (6,7)	(1,3) (2,4) (2,5) (3,6) (4,6) (6,7)
x	(0, 6, 0, 2, 5, 9, 0, 0, 0, 0, 1, 4)	(0, 6, 0, 3, 4, 9, 0, 0, 1, 0, 0, 5)
π	$(0, 3, 7, 9, 9, 16, 21)$	$(0, 8, 7, 14, 14, 16, 21)$
Arco entrante	(4,6)	(4,7)
$\vartheta_{\max}$	1	1
Arco uscente	(5,7)	(4,6)

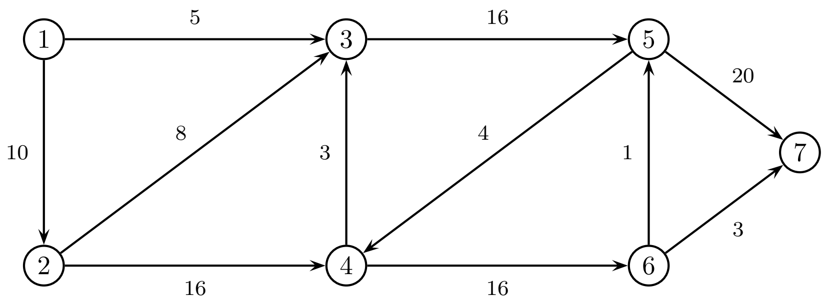
(ii) Discutere la degenerazione delle soluzioni x e π determinate alla seconda iterazione.

La soluzione x e' non degenere essendo $x_{ij} > 0$, $\forall (i,j) \in T$. La soluzione π e' degenere essendo il costo ridotto $\bar{c}_{ij} := c_{ij} + \pi_i - \pi_j = 0$, per $(i,j) = (1,2)$ o $(1,4)$, $(4,6)$, $(6,7)$.

(3i) Dire se il problema del flusso di costo minimo definito al punto (i) ammette ottimo finito. Giustificare la risposta.

Il problema ammette ottimo finito essendo la funzione obbiettivo $c^T x$ inferiormente limitata sulla regione ammissibile: si ha infatti $c^T x \geq 0$, $\forall x \geq 0$, essendo $c^T \geq 0$.

Esercizio 4. (i) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla rete:



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		4		6		7	
nodo 2	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1
nodo 3	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	2	25	5	25	5	25	5	25	5
nodo 5	$+\infty$	-1	21	3	21	3	21	3	21	3	21	3	21	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	41	4	41	4	41	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	41	5	41	5	41	5	41	5
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		4, 7		6, 7		7		$\emptyset$	

(ii) Si elimini dalla rete definita in (i) l'arco (4,6). Si determini la dimensione ed il rango della matrice di incidenza E associata alla rete cosi' ottenuta. Si dica se in tal caso il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 ammette soluzione. Giustificare la risposta.

La dimensione della matrice E é 7×10, il rango di E é 6 in quanto il grafo ottenuto é connesso. Il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 non ammette soluzione in quanto il nodo 6 non ammette archi entranti.

Esercizio 5. (i) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla rete definita nell'esercizio 3, ove i valori indicati sugli archi sono interpretati come capacitá, determinandone in modo opportuno i bilanci ai nodi.

Vettore dei bilanci ai nodi: $b^T = (-v, 0, 0, 0, 0, 0, v)$.

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 4 - 7	3	(0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0)	3
1 - 2 - 5 - 7	6	(6, 0, 3, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 3, 6, 0)	9
1 - 3 - 6 - 7	5	(6, 5, 3, 0, 6, 5, 0, 0,0, 3, 6, 5)	14
1 - 4 - 5 - 7	4	(6, 5, 7, 0,6, 5, 0, 4, 0, 3, 10, 5)	18

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ $N_t = \{5, 7\}$

(ii) Sia $k > 0$ la capacitá dell'arco (4,5). Si determini in funzione di k il flusso massimo della rete.

Un taglio di capacitá minima contenente l'arco $(4, 5)$ é $N_s = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ $N_t = \{5, 7\}$ di capacitá $14+k$ dato dall'algoritmo di Edmonds-Karp, mentre un taglio di capacitá minima non contenente l'arco $(4, 5)$ é $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$ di capacitá 20. Pertanto, per $k \geq 6$ il flusso massimo della rete é 20, mentre per $0 < k \leq 6$ il flusso massimo é $14 + k$.