Esame di Ricerca Operativa del 14/09/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. (a) Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso duale il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min \; 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ y_1 - y_2 - y_3 + y_4 - y_5 = 2 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 - y_4 - y_5 = 7 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

	Base	y	x	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
Iterazione 1	{1,2}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Dire se $\{2, 3\}$ e $\{4, 5\}$ sono basi ammissibili che determinano un vertice del poliedro che definisce la regione ammissibile del problema dato al punto (a).

(c) Determinare una soluzione ottima del problema duale associato al problema primale definito in (a) e discutere l'unicitá delle soluzioni ottime del primale e del duale.

Esercizio 2. Un turista vuole organizzare la sua vacanza in una localitá balneare per la quale prevede spese per i seguenti servizi di cui intendende usufruire:

(S_1) viaggio, (S_2) vitto, (S_3) alloggio, (S_4) trasporto locale, (S_5) balneazione.

I precedenti servizi vengono offerti da un'agenzia di viaggi in pacchetti $P_j \subseteq \{S_1, ..., S_5\}$ al costo c_j, $j = 1, .., 8$. Nella tabella seguente sono elencati i pacchetti ed i relativi costi in euro.

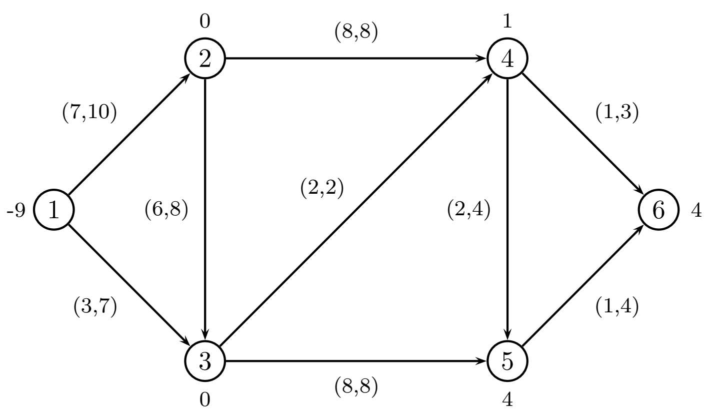
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
S_1	*		*		*	*		
S_2	*	*					*	
S_3	*	*	*				*	*
S_4	*	*		*		*		
S_5			*	*				*
costo c_j	1000	800	600	300	300	400	700	600

Si formuli un problema di programmazione lineare per determinare quali pacchetti il turista deve acquistare per ottenere tutti i servizi $S_1, .., S_5$, minimizzando il costo complessivo della vacanza.

variabili decisionali:

modello:

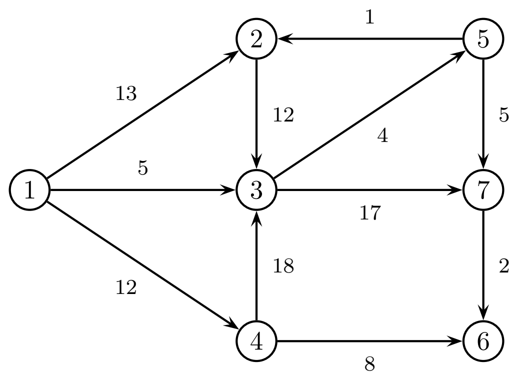
Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (3,5) (5,6)	
Archi di U	(1,3)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

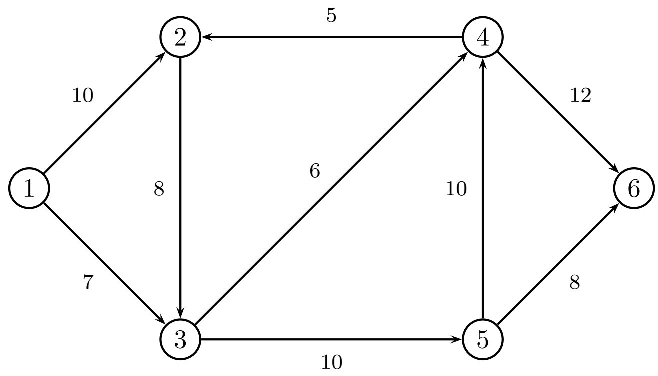
(b) Discutere la degenerazione della soluzione π determinata alla prima iterazione.

Esercizio 4. Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla rete



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

(b) Si determini una soluzione ottima del problema duale associato al problema del massimo flusso definito in (a).

SOLUZIONI

Esercizio 1. (a) Risolvere mediante l'algoritmo del simplesso duale il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ y_1 - y_2 - y_3 + y_4 - y_5 = 2 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 - y_4 - y_5 = 7 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

	Base	y	x	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
Iterazione 1	{1,2}	(3,1,0,0,0)	(0,1)	3	$9,\ \frac{3}{4}$	2
Iterazione 2	{1,3}	$(\frac{11}{4}, 0, \frac{3}{4}, 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$			
Iterazione 3						

(b) Dire se $\{2,3\}$ e $\{4,5\}$ sono basi ammissibili che determinano un vertice del poliedro che definisce la regione ammissibile del problema dato al punto (a).

Le precedenti basi definiscono soluzioni di base non ammissibili per il problema in (a) e quindi non determinano un vertice del poliedro che definisce la regione ammissibile del problema in (a).

(c) Determinare una soluzione ottima del problema duale associato al problema primale definito in (a) e discutere l'unicitá delle soluzioni ottime del primale e del duale.

Le soluzioni ottime del problema primale e del problema duale sono $y = \left(\frac{11}{4}, 0, \frac{3}{4}, 0, 0\right)$ e $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, rispettivamente, e sono uniche essendo entrambe non degeneri.

Esercizio 2.

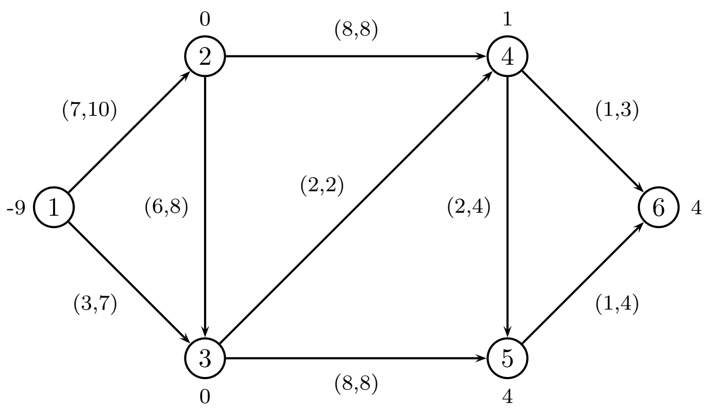
Variabili decisionali:

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{se il turista acquista il pacchetto } P_j \\ 0,\ \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, ..., 8;$$

Modello:

$$\begin{cases} \min\ 1000x_1 + 800x_2 + 600x_3 + 300x_4 + 300x_5 + 400x_6 + 700x_7 + 600x_8 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_7 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_7 + x_8 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_8 \geq 1 \\ x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, ..8. \end{cases}$$

Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá).

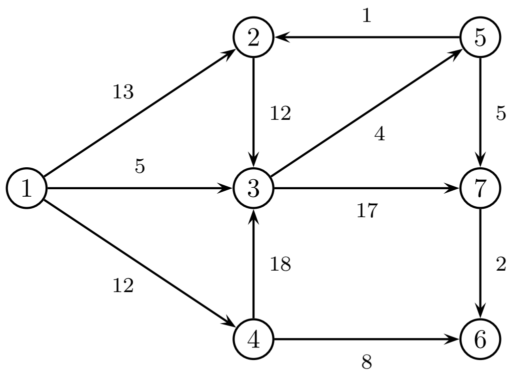


	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (3,5) (5,6)	(1,2) (2,4) (3,5) (4,5) (5,6)
Archi di U	(1,3)	(1,3)
x	(2, 7, 1, 1, 0, 8, 0, 0, 4)	(2, 7, 0, 2, 0, 7, 1, 0, 4)
π	(0, 7, 13, 15, 21, 22)	(0, 7, 9, 15, 17, 18)
Arco entrante	(4,5)	(3,4)
ϑ^+, ϑ^-	4 , 1	2 , 7
Arco uscente	(2,3)	(3,4)

(b) Discutere la degenerazione della soluzione π determinata alla prima iterazione.

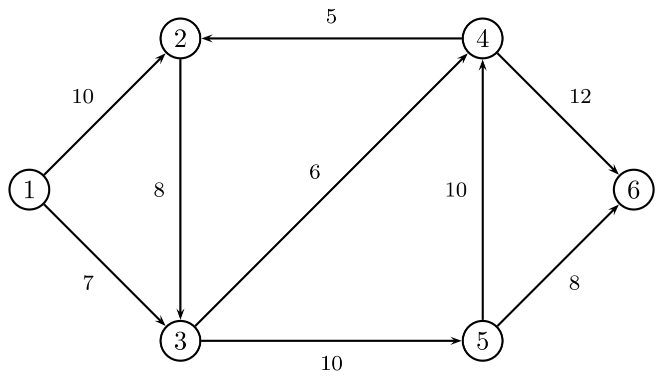
La soluzione é degenere essendo il costo ridotto $\bar{c}_{ij} := c_{ij} + \pi_i - \pi_j = 0$ per l'arco $(i,j) = (3,4)$.

Esercizio 4. (a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		5		2		4		7		6	
nodo 2	13	1	13	1	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5
nodo 3	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 4	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 5	$+\infty$	-1	9	3	9	3	9	3	9	3	9	3	9	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	20	4	16	7	16	7
nodo 7	$+\infty$	-1	22	3	14	5	14	5	14	5	14	5	14	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 5,7		2, 4, 7		4, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla rete



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 4 - 6	6	(0, 6, 0, 6, 0, 0, 6, 0, 0)	6
1 - 3 - 5 - 6	1	(0, 7, 0, 6, 1, 0, 6, 0, 1)	7
1 - 2 - 3 - 5 -6	7	(7, 7, 7, 6, 8, 0, 6, 0, 8)	14
1 - 2 - 3 - 5 - 4 - 6	1	(8, 7, 8, 6, 9, 0, 7, 1, 8)	15

Taglio di capacitá minima: $N_s = \{1, 2\}$ $\quad N_t = \{3, 4, 5, 6\}$

(b) Si determini una soluzione ottima del problema duale associato al problema del massimo flusso definito in (a).

Una soluzione ottima del problema duale é (π, μ) ove:

$$\pi_i = \begin{cases} 0, & i \in N_s \\ 1, & i \in N_t \end{cases}, \quad i = 1, .., 6, \qquad \mu_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i \in N_s\ e\ \ j \in N_t \\ 0, & altrimenti \end{cases}, \quad (i, j) \in A,$$

ove A e' l'insieme degli archi della rete, $N_s = \{1, 2\}$ $\quad N_t = \{3, 4, 5, 6\}$.